Technologie et Université

A. Fouillé

Electrotechnique à l'usage des ingénieurs

tome 1 électro-magnétisme. courants alternatifs.

10e Edition

Dunod

TECHNOLOGIE ET UNIVERSITÉ

ÉLECTROTECHNIQUE
A L'USAGE DES INGÉNIEURS

PAR

A. FOUILLÉ

Professeur honoraire de l'École nationale supérieure d'Ingénieurs Arts et Métiers
Professeur honoraire à l'École Bréguet et à l'Électricité de France
Directeur des Études à l'École Infra

TOME I

Électromagnétisme et courants alternatifs

DIXIÈME ÉDITION

Écoles Nationales d'Ingénieurs
Instituts universitaires de Technologie
Sections de Techniciens supérieurs

dunod

Du même auteur

Electricité fondamentale (Electrostatique et Electrocinétique).

Electrotechnique à l'usage des Ingénieurs, 9e édition.

Tome I : Electromagnétisme. Courants alternatifs:

Tome II : Machines électriques à courants alternatifs.

Tome III : Machines électriques à courant continu. Application de l'Electronique aux machines.

Problèmes d'électricité générale à l'usage des Ingénieurs (en collaboration avec C. Naudet) 9e édition.

Problèmes d'électrotechnique à l'usage des Ingénieurs : Machines électriques, 9e édition.

©BORDAS, Paris. 1978 – 101 678 0310
ISBN 2-04-0010418-6

" Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur, ou de ses ayants-droit, ou ayants-cause, est illicite (loi du 11 mars 1957, alinéa 1er de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. La loi du 11 mars 1957 n'autorise, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, que les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective d'une part, et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration "

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1. — **Le champ magnétique dans le vide** 3

Vecteur B. Induction magnétique. Vecteur H. Champ magnétique. Potentiel vecteur magnétique. Exploration du champ magnétique.

CHAPITRE 2. — **Force et travail électromagnétiques** 23

Force électromagnétique. Travail électromagnétique. A. Application aux appareils de mesures. B. Applications corpusculaires.

CHAPITRE 3. — **Induction magnétique due aux courants électriques** 46

Induction magnétique due aux courants dans l'air 47

I. — Induction et champ dans un milieu magnétique indéfini 55

II. — Induction et champ à la surface de séparation de deux milieux magnétiques 59

III. — Induction et champ dans le noyau d'un tore 61

IV. — Induction et champ d'une bobine à noyau court 62

V. — Induction et champ dans une lame de fer très mince normale au champ 64

CHAPITRE 4. — **Aimantation. Milieux magnétiques** 66

Etude particulière du fer. Saturation. Hysteresis 71

CHAPITRE 5. — **Aimants. Barreau. Aimant permanent. Electroaimant. Matériaux magnétiques** 78

Barreau rigidement aimanté 78

Aimant permanent 83

Electroaimant 87

I. — Théorie du circuit magnétique 87

II. — Calcul de l'électroaimant 95

III. — Matériaux magnétiques 100

CHAPITRE 6. — **Induction électromagnétique** 106

Force électromotrice d'induction 107

Quantité d'électricité induite 119

CHAPITRE 7. — **Autoinduction. Induction mutuelle. Systèmes d'unités électromagnétiques** 129

FEM d'autoinduction. Inductance. énergie électrocinétique. Effets de l'autoinduction 129

Induction mutuelle. Système international d'unités 152

CHAPITRE 8. — **Grandeurs électriques alternatives** 160
Grandeur sinusoïdale 160
Grandeur périodique quelconque 167
Courant pseudopériodique. Circuit oscillant 169
F.E.M. et courant électrique sinusoïdaux 178
Propriétés des courants alternatifs 181

CHAPITRE 9. — **Circuits à courants alternatifs** 190
Méthode graphique 191
I. — Récepteur parfait unique 191
II. — Récepteurs réels 198
Méthode symbolique 213
Opérations sur les nombres complexes 217
Application des nombres complexes à l'électrotechnique 219

CHAPITRE 10. — **Puissance des courants alternatifs** 225
Puissance totale. Puissance aux bornes 225
Puissances active, réactive, apparente 231
Puissance des courants non sinusoïdaux 246

CHAPITRE 11. — **Courants polyphasés** 248
Généralités 248
Systèmes polyphasés industriels 252
Expression de la puissance des systèmes polyphasés 263
Mesure de la puissance des systèmes polyphasés 266
I. — Mesure de la puissance active 266
II. — Mesure de la puissance réactive 272
Systèmes non équilibrés 277
Méthodes vectorielle et symbolique 277
Méthode des composantes symétriques 279
I. — Conventions et définitions 280
II. — Décomposition d'un système quelconque à partir de ses composantes symétriques 283
III. — Décomposition d'un système déséquilibré en ses composantes symétriques 283
IV. — Application aux systèmes déséquilibrés 289

Appendice. équations de Maxwell 298

ÉLECTROMAGNÉTISME

1. Quelques faits d'observation courante. — Certains corps : oxyde magnétique naturel de fer, quelques métaux (fer, nickel, cobalt), après contact avec cet oxyde magnétique, ont pour propriété d'attirer la limaille de fer : on les appelle des *aimants*.

Chacun a observé que :

1° Un aimant allongé attire la limaille surtout vers les extrémités. Celles-ci, jouissant particulièrement de la propriété magnétique, sont appelées *pôles* de l'aimant.

2° Un aimant suspendu s'oriente toujours de façon que la même extrémité se dirige toujours vers le nord, la même vers le sud. Les deux pôles ne sont donc pas identiques : on les distingue l'un de l'autre par les noms de *nord* et *sud*.

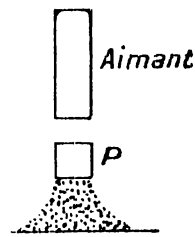


FIG. 1-1.

3° Deux pôles de même nom se repoussent, deux pôles de nom contraire s'attirent. Ces forces s'exerçant entre aimants, sont attribuées à une cause que l'on appelle *magnétisme*.

4° Un morceau de fer doux *P* (fig. 1) placé à proximité d'un aimant devient lui-même un aimant : il attire la limaille de fer.

2. La cause de tout magnétisme est un courant électrique. — Les progrès décisifs dans l'étude du magnétisme datent du début du XIX^e^ siècle, c'est-à-dire de l'époque où :

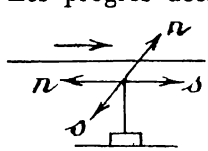


FIG. 1-2.

1° Œrsted, en 1819, observa qu'un courant électrique passant dans un conducteur rectiligne provoque la déviation (fig. 2) d'une aiguille aimantée. Celle-ci ayant, avant le passage du courant, la même direction que le conducteur, tend à se mettre en croix avec lui ;

2° Ampère, en 1820, sut interpréter ce phénomène :

a) Il émit l'hypothèse que des courants électriques dits *particulaires* existent dans tout barreau aimanté, les circuits de ces courants étant dans des plans parallèles entre eux et normaux à l'axe du barreau ;

b) Il montra que, ces courants électriques étant de sens contraires sur les lignes communes aux différents circuits, seuls peuvent être agissants vis-à-vis de l'extérieur les courants dits *équivalents* circulant sur la surface extérieure du barreau dans des plans normaux à son axe. Cela apparaît clairement sur la figure 3 ;

c) Il affirma et vérifia expérimentalement qu'entre deux conducteurs rectilignes parcourus par des courants électriques s'exercent des *forces qui tendent à orienter ces deux courants dans la même direction et le même sens*. Ces forces, d'autant plus grandes que les deux conducteurs sont plus rapprochés, expliquaient la déviation de l'aiguille aimantée.

Figurons en effet (fig. 4) les courants équivalents circulant sur les faces *ABCD*, *A'B'C'D'* du barreau supposé mobile autour de l'axe *xy* et situé au-dessous du conducteur rectiligne parcouru par un courant *I* et dans le plan vertical passant par celui-ci.

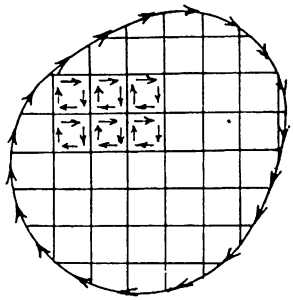


FIG. 1-3.

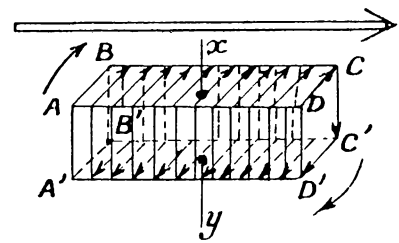


FIG. 1-4.

Les courants équivalents dans leur portion située dans le plan *ABCD* tendent à prendre la direction et le sens du courant *I*. L'action qu'ils subissent étant plus forte que celle qui est subie par les courants équivalents dans le plan *A'B'C'D'* plus éloigné, le barreau se mettra donc *en croix* avec le courant et de telle façon que la face *ABB'A'* se place *en arrière* du plan vertical passant par le conducteur rectiligne. Nous ne tenons pas compte des portions de courants équivalents situées dans les plans verticaux du barreau, car ils ne pourraient engendrer une rotation qu'autour d'un axe perpendiculaire à *xy*.

3. **Force exercée par un élément de courant sur un autre élément de courant. Formule d'Ampère.** — Partant de résultats expérimentaux, Ampère donna la formule de la force élémentaire dF qu'une portion de conducteur dl' placée en *O* et parcourue par un courant *I'* exerce sur une portion de conducteur dl placée en *M* et parcourue par un courant *I*. Cette force :

— est située dans le plan *P* défini par l'élément dl' et la droite *OM* ;

— est normale à l'élément dl ;

— a un sens tel qu'elle tend à superposer *I* dl et *I'* dl' dans le même sens ;

— a pour module :

$$\mathrm{d}F = KII' \frac{\mathrm{d}l\ \mathrm{d}l' \sin\alpha \sin\alpha'}{r^2}, \quad (1)$$

formule dans laquelle :

$r = OM$ = distance des deux éléments ;

α = angle formé par l'élément dl avec la normale *MB* au plan *P* ;

α' = angle formé par l'élément dl' avec la droite $OM = r$;

K = grandeur dépendant du milieu (ici l'air) dans lequel se trouvent les éléments dl et dl' et des unités adoptées pour *I*, *I'*, dl, dl', *r*, *F*.

(1) Un élément de courant est physiquement impossible à réaliser et il faut considérer la formule d'Ampère — sur laquelle on peut faire reposer tout l'Electromagnétisme — comme un artifice de calcul dont l'emploi se justifie par le fait que les forces s'exerçant entre des circuits parfaitement réalisables et déduites de la formule d'Ampère sont confirmées par l'expérience.

CHAPITRE 1

LE CHAMP MAGNÉTIQUE DANS LE VIDE

Dans la formule d'Ampère, considérons l'élément $I'\mathrm{d}l'$ comme exerçant la force $\mathrm{d}F$: nous l'appellerons l'élément *actif*. L'autre élément $I\,\mathrm{d}l$ subit la force $\mathrm{d}F$: nous l'appellerons l'élément *passif*.

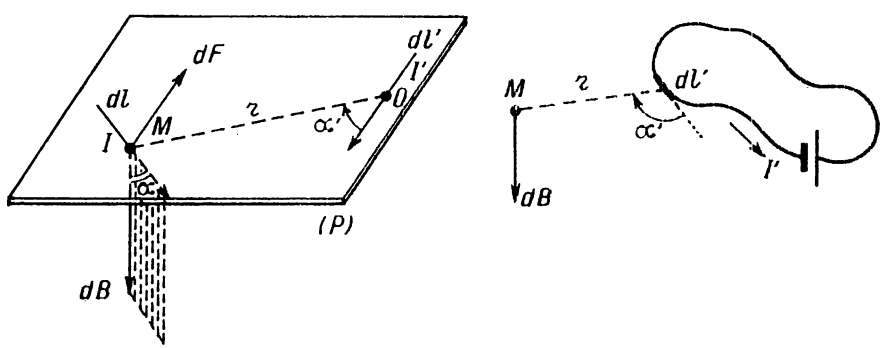


FIG. 1-5. — La force $\mathrm{d}F$ normale au plan hachuré se trouve dans le plan P.

Vecteur $\vec{B}$. Induction magnétique

4. **Force électromagnétique de Laplace. Induction magnétique.** — Considérons l'élément subissant $\mathrm{d}l$ parcouru par le courant I. Il a suffi de le placer dans la position indiquée par la figure 5 pour qu'il soit soumis à la force $\mathrm{d}F$. Il nous apparaît que cette force $\mathrm{d}F$ dépend d'*une propriété de l'espace* au point où se trouve l'élément $\mathrm{d}l$ (propriété due à la présence de l'élément $\mathrm{d}l'$ parcouru par le courant I').

De même que nous avons dit [3-2] : « Le champ électrique $\vec{E}$ caractérise une *propriété de l'espace* au point où se trouve une charge q et déter-

mine sur celle-ci une force $\vec{F} = q\vec{E}$ », nous sommes conduits à dire : « Il existe au point M une grandeur vectorielle, *caractéristique de l'espace* au point M, capable de déterminer sur l'élément $I\,dl$ une force dF. »

Cette grandeur vectorielle désignée par $d\vec{B}$ quand elle est due uniquement à l'élément $I'\,dl'$ a pour notation $\vec{B}$ dans le cas général, c'est-à-dire quand elle est due, en un point, à un ou plusieurs circuits électriques. Elle constitue un véritable *pouvoir de force* caractéristique d'une *déformation* du milieu au point considéré.

Le module dB (cas où l'élément $I\,dl$ est seul agissant) apparaît dans la formule d'Ampère :

$$dB = KI' \frac{dl' \sin \alpha'}{r^2}$$

et l'induction dB détermine la force dF dont le module est :

$$dF = dB \times I\,dl \sin \alpha$$

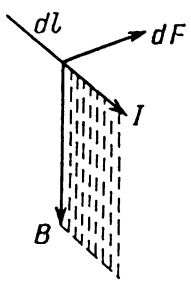


Fig. 1-6.

que l'on peut écrire aussi bien :

$$\left[\vec{dF} = I\vec{dl} \wedge d\vec{B}\right]$$

produit vectoriel de $d\vec{B}$ et d'un vecteur $I\vec{dl}$ qui a la direction de dl et le sens de I.

On l'appelle *force électromagnétique ou force de Laplace.*

Dès lors la grandeur vectorielle $\vec{B}$ *pouvoir de force* dans le champ magnétique (comme la grandeur vectorielle $\vec{E}$ *pouvoir de force* dans le champ électrique) devrait être appelée « champ magnétique » au point M. Pour nous conformer à l'usage, nous l'appellerons *induction magnétique* au point M.

Notons que la force électromagnétique de Laplace est normale au plan défini par $I\vec{dl}$ et par $\vec{B}$ (fig. 6). Nous préciserons son sens plus loin.

5. **L'induction magnétique est un vecteur axial. Loi de Biot et Savart.** — L'expression de l'induction $\vec{B}$:

$$dB = I\,dl' \cdot \frac{K}{r^2} \sin \alpha'$$

qu'on peut écrire :

$$d\vec{B} = \overrightarrow{I'\,dl'} \wedge \frac{\vec{Kr}}{r^3}$$

traduit la loi de Biot et Savart.

Elle montre que l'induction B est le produit géométrique d'un vecteur *polaire* $\overrightarrow{I' \, dl'}$ dont la direction est celle de dl', le sens celui de I' et d'un vecteur *polaire* $\frac{\overrightarrow{Kr}}{r^3}$ ayant la direction de r.

L'induction B est donc un vecteur *axial* et nous la représentons par la lettre $\overrightarrow{B}$ surmontée d'une flèche *arquée*.

Nous savons que le sens d'un vecteur axial est *conventionnel*. Nous dirons ici :

— la direction du vecteur $\overrightarrow{B}$ au point M est perpendiculaire au plan défini par $I' \, dl'$ et par le point M ;

— le sens du vecteur $\overrightarrow{B}$ est *conventionnellement* le sens de rotation du tire-bouchon qui progresserait le long de dl' dans le sens du courant I'.

Observation importante. — On peut s'étonner de ce que :

1° Le sens de l'induction magnétique soit conventionnel alors que le sens du champ électrique ne l'est pas. Cela tient au fait que le champ électrique est défini par la force exercée sur l'unité de charge *positive* et qu'une charge positive *se distingue d'une charge négative par des propriétés physiques* (immobilité dans les métaux, par exemple). L'induction magnétique, par contre, n'a pas de sens en soi.

2° Quel que soit le sens conventionnel donné à $\overrightarrow{B}$ la force s'exerçant entre deux éléments de courants (force qui constitue la seule réalité physique) a le sens indiqué par l'expérience. Cela tient au fait que dans l'expression :

$$\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{I \, dl} \wedge \overrightarrow{dB}$$

lorsqu'on change le sens (donc le signe) de $\overrightarrow{B}$ (axial) on change en même temps la façon de déterminer le sens du produit à partir du sens des facteurs. Le signe du produit change en même temps que le signe de $\overrightarrow{B}$. Les deux changements de signe se détruisent.

REMARQUE. — Les lignes d'induction magnétique, le flux d'induction magnétique, le tube de flux d'induction se définissent comme les grandeurs correspondantes du champ électrique.

6. **La constante K dans l'expression de l'induction B.** — Dans la *formule d'Ampère* (et, par suite, dans l'expression de B) la valeur de la constante K dépend évidemment des unités choisies pour F, dl, dl', r, r' ainsi que pour l'intensité des courants I et I'.

Comme les forces électromagnétiques, toutes choses égales, ne sont pas les mêmes dans les différents milieux, K dépend aussi ***du milieu*** dans lequel ces forces s'exercent. On a donné le nom de ***perméabilité magnétique*** à la grandeur caractéristique du milieu. On la représente par μ_0 ***dans le vide*** (et pratiquement dans l'air). C'est une grandeur douée de dimensions.

Mais au lieu d'écrire :

$$dF = \mu_0 II' \frac{dl\, dl' \sin\alpha \sin\alpha'}{r^2}.$$

On a convenu de rationaliser (1) la formule et d'écrire :

$$dF = \frac{\mu_0}{4\pi} II' \frac{dl\, dl' \sin\alpha \sin\alpha'}{r^2}.$$

7. **Perméabilité magnétique μ_0 du vide dans le système international (*SI*).** — Ayant mathématiquement établi (2), à partir de la

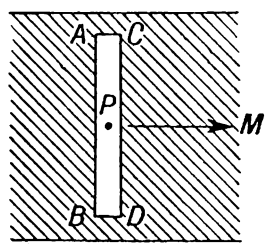


FIG. 1-7.

formule d'Ampère que la force d'attraction qui s'exerce sur une longueur l (fig. 3-8), entre deux fils rectilignes parallèles indéfinis distants de a, parcourus par des courants I_1 et I_2 de même sens est :

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 l}{a}$$

On a adopté comme système mécanique de rattachement le système *MKS* (force F en newtons, distance a en mètres) et comme unité d'intensité de courant l'ampère déjà défini par voie électrolytique.

La mesure (3) de la force F avec $I_1 = I_2 = 1$ A ; $l = 1$ m ; $a = 1$ m, a donné (fig. 8), $F = 2 \times 10^{-7}$ N. Il en résultait la valeur :

$$\mu_0 = \frac{2\pi a F}{I_1 I_1} = \frac{2\pi \times 1 \times 2 \times 10^{-7}}{1} = \boxed{4\pi \times 10^{-7}}$$

Les mesures des effets électrochimiques étant moins commodes et

(1) Même raison que pour la formule de Coulomb. Il s'agit de ne faire apparaître le facteur 4π que dans les formules de grandeurs ayant une symétrie sphérique.

(2) Démonstration au § 3-5.

(3) Plus précisément cette mesure s'effectue avec la balance électrodynamique [2-12].

moins précises que celles des forces électrodynamiques, on a, par la suite changé la définition *légale* de l'ampère et adopté la suivante (1).

« *L'ampère est l'intensité du courant qui, maintenu constant dans deux conducteurs rectilignes parallèles de longueur infinie (fig. 8) de section circulaire négligeable placés à 1 mètre l'un de l'autre produit, entre ces conducteurs une force de* $2 \times 10^{-7} N$ *par mètre de longueur.*

En définitive, dans le système *SI*, nous écrirons dorénavant :

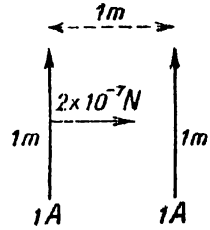


FIG. 1-8.

$$\boxed{dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I'\,dl'\sin\alpha'}{r^2} \quad \begin{matrix} A & m \\ & \\ & m \end{matrix}} \qquad (\text{avec } \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7})$$

REMARQUE. — Nous démontrerons plus loin [7-9] que, entre ε_0 et μ_0, existe une relation remarquable :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

(c = vitesse de la lumière).

8. **Unités *SI* d'induction magnétique.** — Sa définition est basée sur la formule :

$$\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{I\,dl} \wedge \overrightarrow{B}.$$

C'est l'induction magnétique uniforme en un point tel qu'une portion de courant rectiligne de 1 m de long perpendiculaire à la direction de l'induction et parcouru par un courant de 1 ampère soit soumis à une force de 1 newton. Cette unité est appelée *tesla* (T) (2).

9. **Unité *SI* de flux d'induction: Weber.** — Sa définition à partir de la formule :

$$\Phi = BS\cos\alpha$$

s'énonce ainsi : flux qui traverse une surface de 1 m² placée normalement aux lignes d'induction dans un champ magnétique uniforme d'induction 1 tesla. On l'appelle le *weber*.

Nous pourrons donc écrire la formule du flux d'induction en unité correspondantes :

$$\boxed{\underset{\text{webers}}{d\Phi} = \underset{\text{tesla}}{B} \quad \underset{m^2}{ds} \quad \cos\alpha} \quad (3)$$

(1) L'ampère légal (1961) est un peu supérieur à l'ampère électrochimique (1919). Il correspond au dépôt de 1,11825 g d'argent (au lieu de 1,11800).

(2) Anciennement *gauss*. Un tesla vaut un myriagauss (10^4 G).

(3) Anciennement *maxwell*. On a : 1 weber = 10^8 maxwells.

Nous noterons que, si l'on définit l'induction à partir du flux, le *tesla* est aussi bien le weber par mètre carré (1).

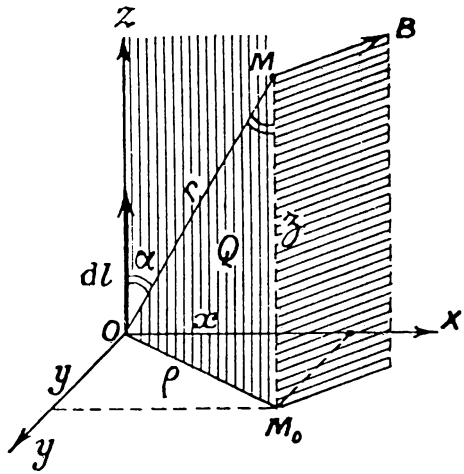
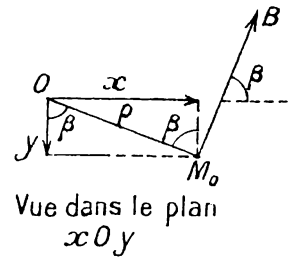


FIG. 1-9.



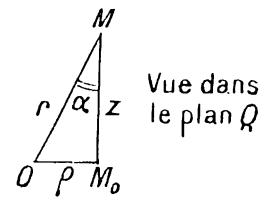


FIG. 1-10.

10. **Le flux magnétique d'induction est conservatif.** — La somme de plusieurs vecteurs conservatifs est un vecteur conservatif. C'est pourquoi il suffira de démontrer la conservation du flux produit par un *élément de courant.*

Soient trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz (fig. 9). Supposons l'élément dl parcouru par le courant I disposé en O et dirigé suivant l'axe Oz. L'induction B que cet élément crée au point M tel que $OM = r$ a pour direction la normale au plan Q défini par l'élément dl et par le point M (x, y, z) et pour module :

$$B = \frac{1}{4\pi}\mu_0 \frac{I\,dl \sin\alpha}{r^2} = \frac{1}{4\pi}\mu_0 \frac{I\,dl}{r^2} \times \frac{\rho}{r} \qquad (\text{car } \sin\alpha = \rho/r).$$

D'où :

$$\frac{B}{\rho} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

La projection du vecteur $\vec{B}$ sur le plan xoy a pour module le module de $\vec{B}$. Désignons par B_x, B_y, B_z les projections du vecteur B sur les trois axes. Nous avons (fig. 10) :

$$B_x = B\cos\beta = B\frac{y}{\rho} = \frac{B}{\rho}y = \frac{\mu_0 y}{4\pi} I\,dl\,(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$B_y = -B\sin\beta = -B\frac{x}{\rho} = -\frac{B}{\rho}x = -\frac{\mu_0 x}{4\pi}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} I\,dl$$

$$B_z = 0.$$

(1) Comme le flux d'induction peut être directement mesuré (fluxmètre) l'induction B apparaît au technicien, non pas comme un pouvoir de force, mais surtout

Nous en déduisons :

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\mu_0 y}{4\pi}\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \times 2x = -\frac{3\mu_0 xy}{4\pi}(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\mu_0 x}{4\pi}\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \times 2y = +\frac{3\mu_0 xy}{4\pi}(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

On voit que l'on a :

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

La divergence du vecteur $\vec{B}$ est nulle. Le vecteur $\vec{B}$ est donc à flux conservatif.

Vecteur *H*. Champ magnétique

11. **Vecteur champ magnétique** *H*. — L'expérience, avons-nous dit [1-3] a montré que la force dF dépend *du milieu* dans lequel s'exercent ces forces. C'est dire que l'induction B en un point M dépend :

a) De la *source de champ* c'est-à-dire de l'élément $I\,dl$ à la distance r de ce point.

b) Du *milieu*, caractérisé par sa perméabilité μ_0 (si ce milieu est le vide).

On a donc été conduit à définir par :

$$H = B/\mu_0$$

un nouveau vecteur H qui ne dépend que de la source de champ. C'est le vecteur *champ magnétique.*

L'intérêt de ce second vecteur est apparu quand on a découvert ses propriétés particulières et importantes.

Remarque I. — On peut concevoir que H est la *cause* (activité magnétique de la source de champ) et B l'*effet* (déformation de l'espace, d'où pouvoir de force).

Remarque II. — Il y a une analogie entre les vecteurs :

$\vec{E}$ pouvoir de force sur une charge électrique ;

$\vec{B}$ pouvoir de force sur un élément de courant.

Remarque III. — Le vecteur H est comme le vecteur B (auquel il est proportionnel dans le vide) un vecteur axial et, en toute rigueur, on doit le représenter par $\vec{H}$.

comme une ***densité de flux*** et il préfère souvent exprimer B en ***webers par mètre carré*** plutôt qu'en teslas.

On appelle *ligne de champ* la ligne tangente en chaque point, au vecteur H. Dans le vide, les lignes de champ se confondent évidemment avec les lignes d'induction.

12. **La distinction entre B et H n'est importante que dans les milieux magnétiques.** — La formule $B = \mu_0 H$ (dans le vide) montre la proportionnalité rigoureuse, dans le vide, des vecteurs B et H. Il n'y aurait pas eu de raison majeure de définir H si notre étude n'avait porté que sur l'induction dans le vide.

Mais nous montrerons (chapitre 4) que dans les milieux magnétiques, non seulement les vecteurs B et H ne sont plus proportionnels, mais encore manifestent des *propriétés tout à fait différentes.*

C'est pourquoi nous nous proposons maintenant de mettre en évidence *dans le vide* la propriété que le vecteur H *conservera dans les milieux aimantés* : celle de *dériver d'un potentiel.*

Il s'agit d'abord de définir le potentiel scalaire magnétique.

Potentiel scalaire magnétique

13. **Élément de circulation du vecteur $\mathrm{d}H$ dû à un élément de courant.** — Soit un élément de courant $I\ \mathrm{d}l$ (fig. 11) placé en O et produisant en M, dans le vide le champ élémentaire :

$$\mathrm{d}H = \frac{\mathrm{d}B}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi} I\ \mathrm{d}l \cdot \frac{\sin\alpha}{r^2}$$

soit :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}H} = \frac{1}{4\pi} \overrightarrow{I\ \mathrm{d}l} \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \frac{1}{r}.$$

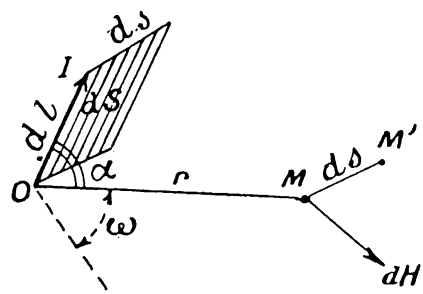


FIG. 1-11.

Imaginons un petit déplacement $MM' = \mathrm{d}s$ du vecteur $\mathrm{d}H$ à partir du point M. L'élément de circulation de $\mathrm{d}H$ (travail du vecteur $\mathrm{d}H$ le long de $\mathrm{d}s$) est :

$$\mathrm{d}\mathcal{C} = \overrightarrow{\mathrm{d}H} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \left(\frac{1}{4\pi} \overrightarrow{I\ \mathrm{d}l} \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \frac{1}{r}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \frac{I}{4\pi} \overrightarrow{\mathrm{d}s} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{d}l} \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \frac{1}{r}\right)$$

(1) La double couche de charges *en mouvement* dans le solénoïde a joué le même rôle que la double couche de charges *au repos* dans le disque conducteur.

(2) Anciennement l'*œrsted*. On a 1 A/m = 4π milliœrsteds.

produit mixte qui peut s'écrire :

$$dC = \frac{I}{4\pi}(\overrightarrow{ds} \wedge \overrightarrow{dl}) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{1}{r} = -\frac{I}{4\pi}\underbrace{(\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{ds})}_{\substack{\text{Vecteur porté} \\ \text{par la normale} \\ \text{à } dS}} \cdot \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{1}{r}}_{\substack{\text{Vecteur} \\ \text{porté} \\ \text{par } OM}}$$

Le produit vectoriel $\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{ds}$ est normal au plan défini par ds et dl et a pour module l'aire dS du parallélogramme construit sur ds et dl. D'autre part grad $1/r$ est un vecteur dirigé suivant OM et ayant pour module $1/r^2$.

On a donc :

$$d\mathcal{C} = \frac{I}{4\pi}\frac{dS\cos\omega}{r^2} \qquad (\omega = \text{angle de } OM \text{ avec la normale à } dS),$$

soit :

$$d\mathcal{C} = \frac{I}{4\pi} \times \text{angle solide sous lequel de } M \text{ on voit } dS = \frac{I}{4\pi}\,d\Omega.$$

14. **Élément de circulation d'un circuit fermé.** — Si le système créant l'induction en M est un circuit fermé, les vecteurs H dus en M aux différents éléments de courant s'ajoutent *géométriquement* :

$$\overrightarrow{H} = \overrightarrow{dH_1} + \overrightarrow{dH_2} + \overrightarrow{dH_3} + \ldots.$$

Et en vertu de la distributivité du produit scalaire :

$$\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{ds} = \overrightarrow{dH_1} \cdot \overrightarrow{ds} + \overrightarrow{dH_2} \cdot \overrightarrow{ds} + \overrightarrow{dH_3} \cdot \overrightarrow{ds} + \ldots.$$

Dès lors, pour obtenir l'élément de circulation $\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{ds}$, il suffira de faire subir *au circuit tout entier* la translation ds et d'évaluer l'angle solide sous lequel du point M on voit *l'aire balayée par le circuit* dans cette translation. Mais, comme le circuit est fermé, cette aire n'est autre que la *variation de l'angle solide sous lequel du point M* est vu ce circuit lorsqu'il subit la translation ds (fig. 12).

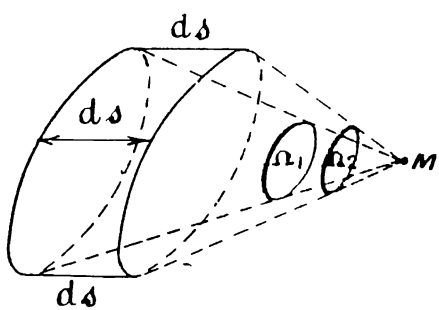


FIG. 1-12.

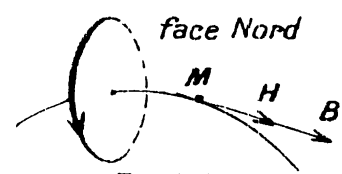


FIG. 1-13.

Soit dΩ cette variation d'angle solide. Nous écrirons pour expression de l'élément de circulation du vecteur $\overrightarrow{H}$ dû à un circuit fermé :

$$d\mathcal{C} = \frac{I}{4\pi}\,d\Omega.$$

Remarque sur le signe de Ω. — On convient d'appeler face *nord* d'un

circuit celle qu'un observateur a devant lui quand il voit tourner le courant dans le sens *antihoraire* (fig. 15). A ce moment B et H [12] tendent à éloigner du circuit leurs points d'application. Une circulation élémentaire $d\mathcal{C}$ *positive* doit correspondre à une variation d'angle solide $d\Omega$ *négative* et Ω est positif quand, du point M on voit la face *nord* du circuit. Nous écrirons donc en grandeur et en signe :

$$\boxed{d\mathcal{C} = -\frac{I}{4\pi}\, d\Omega.}$$

15. **Circulation de $\vec{H}$ le long d'une courbe finie $\overset{\frown}{MN}$.** — L'angle solide sous lequel du point M on voit le circuit ne dépend évidemment que de la *position relative* du point M et du circuit. Il revient donc au même de :

— laisser le point M fixe et déplacer le circuit de $\vec{ds}$, ou bien

— laisser le circuit fixe et déplacer le point M de $\vec{ds}$.

Dès lors, pour avoir la circulation de H le long d'une courbe $\overset{\frown}{MN}$, il suffira de déplacer le point M de M à N et de multiplier par $\frac{I}{4\pi}$ la *variation de l'angle solide sous* lequel est vu le circuit, quand on se déplace de M à N :

$$\mathcal{C}_M^N = \int_M^N \vec{H} \cdot \vec{ds} = \int_M^N d\mathcal{C} = \int_M^N -\frac{I}{4\pi}\, d\Omega = \boxed{\frac{I}{4\pi}(\Omega_M - \Omega_N)}$$

Ω_M = angle solide sous lequel on voit le circuit du point M ;

Ω_N = angle solide sous lequel on voit le circuit du point N.

16. **Potentiel d'où dérive le vecteur H.** — Si nous posons :

Circulation élémentaire du vecteur $H = d\mathcal{C} = -d\mathcal{V}$,

le vecteur H nous apparaît comme la dérivée changée de signe (dérivée prise dans la direction de H) de la grandeur :

$$\mathcal{V} = \frac{I}{4\pi}\,\Omega + C^{te}$$

(la constante étant nulle, puisque pour un point à l'infini, on a $\mathcal{V} = 0$ et $\Omega = 0$).

Cette fonction $\mathcal{V}$ est donc le *potentiel scalaire magnétique dû au circuit électrique* au point d'où le circuit est vu sous l'angle solide Ω.

17. Circulation de $\vec{H}$ le long d'un parcours fermé. Théorème d'Ampère. — Puisque le vecteur $\vec{H}$ dérive du potentiel scalaire V, sa circulation le long d'un parcours fermé devrait être nulle.

Mais le fait remarquable est le suivant : *la circulation du vecteur H le long d'un parcours fermé n'est plus nulle si ce parcours enlace un circuit électrique.*

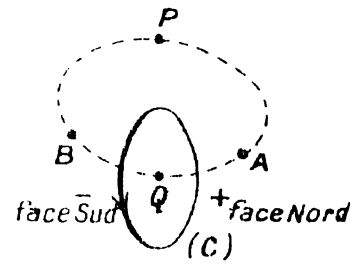


FIG. 1-14.

Soit en effet (fig. 14) un circuit électrique C enlacé par un parcours fermé qui coupe le plan du circuit en deux points P (à l'extérieur du circuit) et Q (à l'intérieur du circuit). On a $\Omega_P = 0$. Quant à Ω_Q, il est égal à $+ 2\pi$ ou $- 2\pi$ suivant que Q est considéré devant la face nord ou devant la face sud du circuit.

On a donc :

Circulation de H suivant $\overset{\frown}{QAP}$: $\mathcal{C}_1 = \int_{2\pi}^{0} -\frac{I}{4\pi}\,d\Omega = +\frac{I}{2}$.

Circulation de H suivant $\overset{\frown}{PBQ}$: $\mathcal{C}_2 = \int_{0}^{-2\pi} -\frac{I}{4\pi}\,d\Omega = +\frac{I}{2}$.

La circulation totale le long du parcours fermé est donc :

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 = I.$$

THÉORÈME D'AMPÈRE. — *La circulation du champ $\vec{H}$ le long d'un parcours fermé enlaçant un circuit électrique parcouru par un courant I est égale à I.*

Évidemment cette circulation devient n fois plus grande et égale à nI si le parcours fermé boucle n fois le circuit ou bien une fois un circuit électrique de n spires. L'expression générale du théorème d'Ampère est donc :

$$\mathcal{C}_h = \oint_{(C)} \vec{H}\,\vec{dl} = \boxed{nI}$$

18. Unité de champ magnétique. — Appliquons l'expression précédente au champ H créé le long d'une circonférence de longueur l dans l'intérieur d'une bobine en forme de tore circulaire (fig. 15) comportant n spires parcourues par le courant I.

Par raison de symétrie le vecteur $\vec{H}$ est, en chaque point, tangent à cette circonférence. Le théorème d'Ampère s'écrit :

$$nI = Hl$$

(1) Il apparaît que H est un vecteur axial, car il correspond à la rotation d'un courant. Son sens conventionnel est celui du tire-bouchon tournant comme tourne le courant.

D'où la définition de l'*ampère par mètre* unité de champ magnétique.

L'ampère par mètre est le champ créé par une bobine dont la densité linéique (courant passant autour d'une longueur de 1 m compté suivant son axe) est de 1 ampère.

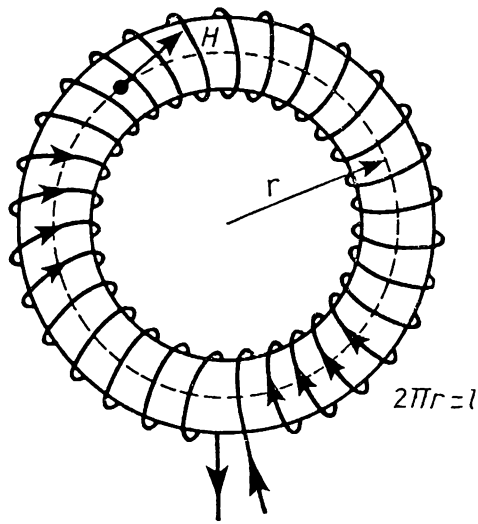


FIG. 1-15.

REMARQUE. — Cette définition est symétrique de celle de l'unité du champ électrostatique : le volt par mètre.

19. **Expression différentielle du théorème d'Ampère.** — Une courbe C enlace des courants (fig. 16) dont la somme algébrique est Σi. Soit S une surface

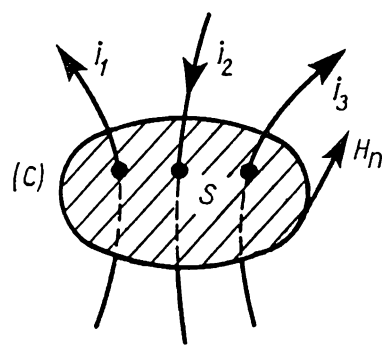


FIG. 1-16.

s'appuyant sur la courbe C. Désignons par J la densité de courant en chaque point de S. Le théorème d'Ampère nous permet d'écrire :

$$\oint_{(C)} \vec{H} \cdot \vec{dl} = \oint_{(C)} \vec{J} \cdot \vec{dS}.$$

D'après le théorème de Stokes, on peut aussi écrire :

$$\oint_{(C)} \vec{H} \cdot \vec{dl} = \oint \text{rot}\, \vec{H} \cdot \vec{dS}.$$

Comme cette expression doit être valable quel que soit S, on en déduit qu'en chaque point du champ :

$$\boxed{\text{rot}\, \vec{H} = \vec{J}}.$$

Elle est l'expression différentielle du théorème d'Ampère.

20. **Le potentiel scalaire magnétique est une fonction multiforme.** — Le fait pour H de dériver d'un potentiel $\mathcal{V}$ implique que la circulation de H soit nulle *pour tout parcours fermé* (potentiel à l'arrivée = potentiel au départ).

Nous venons de montrer que cela n'est pas vrai si le parcours fermé enlace un circuit parcouru par un courant. Doit-on, dès lors, contester l'existence d'un potentiel magnétique ?

On ne le doit pas. La contradiction apparente vient, en effet de l'angle solide Ω dont la valeur n'est pas déterminée de façon unique, mais augmente de 4π [1] à chaque parcours effectué autour du circuit. C'est une fonction *multiforme* de la position du point considéré sur le parcours [2].

Disons pour conclure que le champ magnétique dérive bien d'un potentiel, mais (contrairement au potentiel électrique), celui-ci est une fonction multiforme.

Observation importante. Toutes les propriétés, toutes les formules démontrées pour le champ magnétique H sont valables *dans le vide* pour l'induction $B = \mu_0 H$ puisque μ_0 est constant. L'induction magnétique dérive d'un potentiel $\frac{\mu_0}{4\pi} I\Omega$ et la circulation du vecteur $\vec{B}$ le long d'une courbe fermée enlaçant un circuit électrique parcouru par un courant I (théorème d'Ampère) est égale à $\mu_0 I$.

21. **Unité *SI* de potentiel magnétique : l'ampère.** — Sa définition est basée sur la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{4\pi} I\Omega.$$

(1) On pourrait aussi bien raisonner ainsi : à la traversée de la surface frontière à l'intérieur du circuit, le potentiel $\mathcal{V}$ subit une variation brusque de $-I/2$ à $+I/2$, c'est-à-dire de I. La spire parcourue par un courant a apporté l'énergie nécessaire à cet accroissement brusque de potentiel. A la variation nulle du potentiel dans tout parcours fermé, il faut donc ajouter la valeur I de la discontinuité de potentiel rencontrée.

(2) Comme l'angle d'une demi-droite OM avec une direction Ox (angle défini à $K \times 2\pi$ près). Également comme les fonctions arc sin x et arc cos x (définies à $2K\pi$ près).

C'est le potentiel magnétique en un point d'où l'on voit sous un angle de 4π stéradians (un spat) un circuit parcouru par un courant de 1 ampère.

Comme un angle solide est de dimensions nulles, un potentiel magnétique est homogène à l'intensité d'un courant électrique. C'est pourquoi l'unité de potentiel magnétique a été appelée l'*ampère* (1).

Potentiel vecteur magnétique

22. **Insuffisance du potentiel magnétique scalaire.** — Nous avons établi l'expression du potentiel magnétique *scalaire* à partir de l'angle solide balayé par un circuit électrique *filiforme*. Mais s'il s'agit d'une *nappe continue* de courants électriques ou d'une *distribution volumique* de courants, le potentiel scalaire en un point n'est plus défini et il devient impossible de déterminer H et B en ce point.

Il faut alors faire appel à une autre grandeur : le *potentiel vecteur magnétique.*

23. **Définition du potentiel vecteur magnétique.** — Le flux du vecteur $\vec{B}$ étant conservatif, on peut écrire :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

et nous savons que pour un vecteur quelconque $\vec{A}$ on a toujours :

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} A) \equiv 0.$$

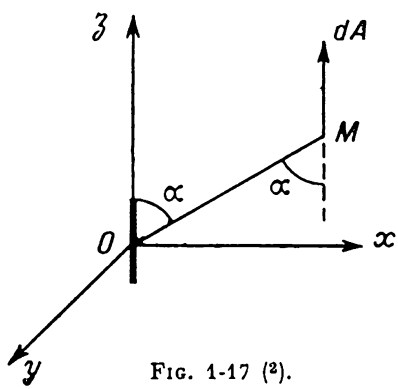


FIG. 1-17 (2).

La comparaison des deux relations précédentes nous fait apparaître $\vec{B}$ comme le *rotationnel d'un vecteur* $\vec{A}$. Ce vecteur $\vec{A}$ dont $\vec{B}$ est le rotationnel s'appelle *potentiel vecteur de* $\vec{B}$.

24. **Expression dans le vide du potentiel vecteur magnétique dû à un élément de courant.** — Soit $d\vec{B}$ l'induction créée en un point M par un élément de courant dl à la distance r de ce point. Prenons la direction de dl (fig. 17) comme axe Oz d'un trièdre trirectangle, le point M (x, y, z) étant dans le plan zox. La formule de Biot et Savart nous donne :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, dl \sin \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, dl}{r^2} \frac{x}{r} \qquad (1)$$

Le vecteur dB étant perpendiculaire au plan xoz s'identifie avec sa projection sur l'axe des y :

$$dB_y = dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, dl}{r^2} \frac{x}{r}$$

(1) Anciennement le *gilbert*. On a 1 ampère = 4π décigilberts.
(2) OM est égal à r.

Considérons au point M le vecteur $\overrightarrow{dA}$ parallèle à dl, c'est-à-dire ayant pour projections :

$$dA_x = 0 \qquad dA_y = 0 \qquad dA_z = dA$$

et le module dA tel que :

$$\overrightarrow{dB} = \text{rot}\,\overrightarrow{A}$$

soit :

$$dB = dB_y = \text{rot}_y(dA) = \frac{\partial}{\partial z}(dA_x) - \frac{\partial}{\partial x}(dA_z) \quad [I\text{-}12]$$

c'est-à-dire puisque $\partial A_x = 0$ et $\partial A_z = \partial A$:

$$dB = -\frac{\partial}{\partial x}(dA) = -\frac{\partial}{\partial r}(dA) \times \frac{\partial r}{\partial x}$$

avec

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1} \times 2x = \frac{x}{r}.$$

On a donc :

$$dB = -\frac{\partial}{\partial r}(dA) \times \frac{x}{r}.$$

En identifiant avec l'expression ci-dessus (1) de dB, il vient :

$$-\frac{\partial}{\partial r}(dA) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^2}.$$

d'où :

$$\boxed{dA = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{r}}$$

25. **Potentiel vecteur dû à un ensemble de courants.** — Désignons par $\int \overrightarrow{dB}$ la somme *géométrique* de vecteurs $\overrightarrow{dB}$ dus en un point à un ensemble de courants. Le potentiel vecteur correspondant sera défini par :

$$\overrightarrow{A} = \int \overrightarrow{dA} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\vec{dl}}{r} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\vec{dl}}{r}}$$

expression dans laquelle $\int \frac{\vec{dl}}{r}$ représente la somme *géométrique* des vecteurs $\vec{dl}/r$, somme étendue à l'ensemble des circuits.

Remarque. — Il y a une différence importante entre un potentiel scalaire et un potentiel vecteur :

Potentiel scalaire = somme algébrique de termes scalaires.
Potentiel vecteur = somme géométrique de grandeurs vectorielles.

26. **Intérêt de la notion de potentiel vecteur.**

Le potentiel vecteur :

1° *Facilite l'expression de $\vec{B}$ par ses composantes.*
Quand on connaît, en un point de l'espace, le potentiel vecteur $\vec{A}$ par ses compo-

santes A_x, A_y, A_z, la détermination de $\vec{B}$ (par ses composantes) ne nécessite plus que des dérivations :

$$B_x = \text{rot}_x A = \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}, \text{ etc...}$$

($\text{rot}_x A$ = projection de rot A sur l'axe des x).

2° *Permet d'exprimer l'induction créée en un point M par des courants permanents répartis en volume.*

En effet, à chaque élément de *tube de courant* de section dS et de longueur dl où la densité de courant est $\vec{J}$, on peut faire correspondre, en un point M de l'espace un vecteur :

$$\vec{dA} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{J}\, dS \frac{dl}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{J} \frac{d\nu}{r}.$$

r = distance de cet élément au point M ;
$d\nu$ = volume de l'élément de tube ;
et le potentiel vecteur au point M a pour expression :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(\nu)} \frac{\vec{J}\, d\nu}{r}$$

On remarque l'analogie de cette expression avec celle du potentiel électrostatique :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(\nu)} \frac{\rho\, d\nu}{r}$$

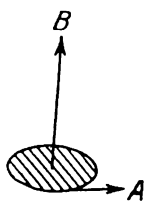


FIG. 1-18.

C'est cette analogie qui explique le nom de potentiel-vecteur donné à la grandeur $\vec{A}$.

3° *Permet d'exprimer le flux d'induction envoyé par un circuit C_1 à travers un circuit C_2.*

En effet l'égalité $\vec{B} = \text{rot}\, \vec{A}$ permet, en vertu du théorème de Stokes, d'écrire (fig. 18) flux de $\vec{B}$ à travers dS = circulation de $\vec{A}$ autour de dS :

$$d\Phi = \int_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{ds} = \int_{(S)} \text{rot}\, \vec{A} \cdot \vec{ds} = \oint_{(C)} \vec{A} \cdot \vec{dl}$$

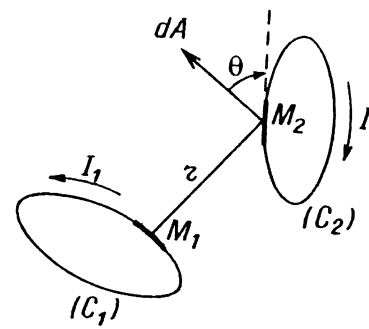


FIG. 1-18 *bis.*

Soit Φ_{1-2} le flux d'induction qu'un circuit C_1 (fig. 18 *bis*) envoie à travers un circuit C_2. A chaque élément dl_1 du circuit C_1 on peut faire correspondre en un point M_2 un vecteur $\vec{dA}$ parallèle à dl_1 et dont le module est :

$$dA = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{dl_1}{r} \qquad (r = \text{distance } M_1M_2)$$

L'élément dl_1 envoie à travers C_2 un flux :

$$d\Phi_{1-2} = \underbrace{\oint_{(C_2)} \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{dl_1}{r} \cdot dl_2}_{[dA]} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1\, dl_1 \cdot \int_{(C_2)} \frac{dl_2}{r}$$

qui est la circulation de dA autour de C_2. Nous écrirons :

$$d\Phi_{1-2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \, dl_1 \oint_{(C_2)} \frac{dl_2 \cos\theta}{r}$$

d'où :

$$\Phi_{1-2} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{dl_1 \, dl_2 \cos\theta}{r} \qquad \text{(formule de Neumann)}$$

formule qui a une application importante dans la détermination de l'inductance mutuelle [7-22] de deux circuits.

Exploration du champ magnétique

27. **Spectre magnétique.** — On peut explorer un champ magnétique, ou plus exactement tracer les lignes d'induction de ce champ :

a) En déplaçant dans le champ de l'aimant une *petite aiguille aimantée* suspendue par son centre de gravité ; soumise en chaque point à un couple, elle s'oriente tangentiellement à la ligne d'induction passant par ce point (position d'équilibre où le couple est nul). Il est dès lors possible d'obtenir expérimentalement le dessin des lignes d'induction.

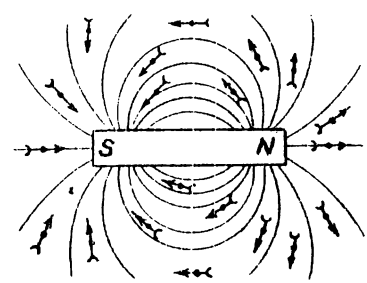


FIG. 1-19.

b) En réalisant le *spectre magnétique* de ce champ. Sur le générateur du champ, on pose une feuille de papier que l'on saupoudre de limaille de fer. Nous avons vu que chaque grain de limaille, placé dans le champ, devient lui-même un aimant. Il s'oriente donc comme l'aiguille exploratrice suivant la composante, dans le plan de la feuille, de l'induction de l'aimant au point où il se trouve. Dès lors, l'ensemble des grains de limaille, s'attirant par leurs pôles adjacents qui sont de nom contraire, se disposent en chaînes qui dessinent les lignes d'induction.

Les figures 20 à 23 représentent différent spectres. On s'expliquera leur apparence et on pourra prévoir les déplacements des pôles d'aimants en appliquant aux lignes de champ (ou d'induction) les règles de Faraday [1] que nous avons vérifiées dans le cas du champ électrique,

La figure 20 représente, dans un plan parallèle à un barreau aimanté. le champ de celui-ci. La figure 21 montre l'attraction de deux extrémités contraires de deux barreaux aimantés présentant en regard, l'un un flux sortant, l'autre un flux entrant : les lignes d'induction, pour se raccourcir, amèneront les deux barreaux en contact ; entre les deux extrémités, l'induction est sensiblement uniforme. Ce spectre est analogue au spectre électrique de deux charges ponctuelles de signe contraire (chapitre 3).

[1] Voir du même auteur, *Électricité fondamentale*, Dunod éditeur.

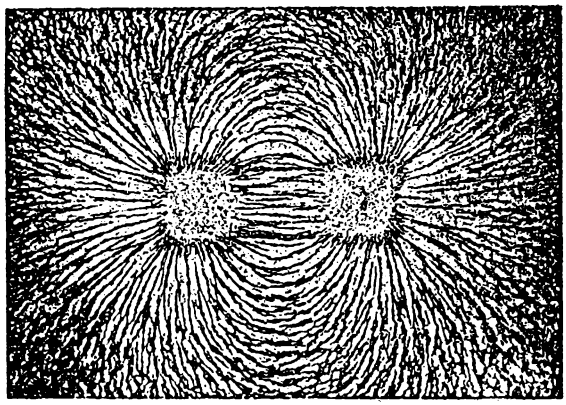


FIG. 1-20.

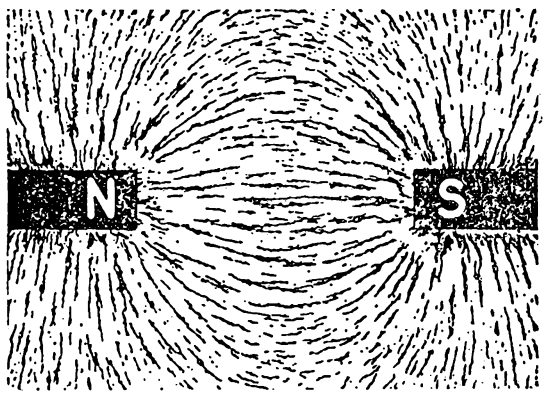


FIG. 1-21.

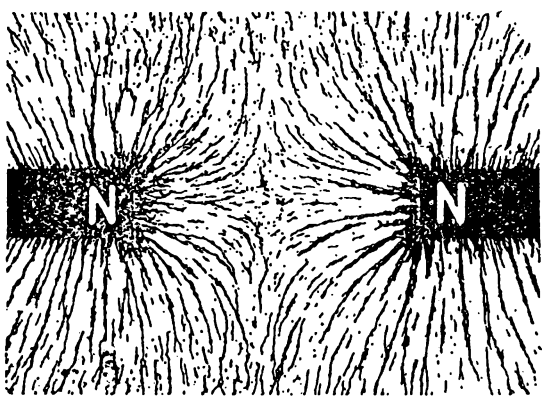


FIG. 1-22.

La figure 22 se rapporte à deux extrémités de même nom de deux barreaux : les lignes d'induction qui sont parallèles et de même sens se repoussent ; elles sont déformées, aplaties en quelque sorte : les barreaux seront repoussés. Ce champ est analogue à celui de deux charges électriques ponctuelles de même nom.

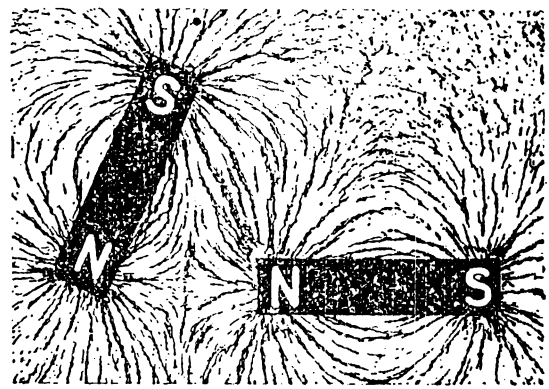


FIG. 1-23.

Enfin la figure 23 se rapporte à deux barreaux placés, l'un par rapport à l'autre, dans une position quelconque. On se représente nettement comment l'un tend à s'appliquer sur l'autre par une rotation et une translation.

28. Tableau résumé des relations fondamentales s'appliquant au champ magnétique dans le vide. — 1° *Relations du champ magnétique dans le vide :*

Champ magnétique $H = \frac{1}{4\pi} \frac{I' \, dl' \sin \alpha}{r^2}$

$\mu_0 H = B \rightarrow$

Induction magnétique $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I' \, dl' \sin \alpha'}{r^2}$

↓

A un flux conservatif

$d\Phi = B \, ds \cos \alpha$

↓

Exerce sur un élément $I \, dl$ une force

↓

$F = BI \, dl \sin \alpha$

↓

Est le rotationnel d'un (potentiel) vecteur

$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \, dv}{r}$

↓

Dérive d'un potentiel scalaire

$\mathcal{V} = \frac{I}{4\pi} \Omega$

↓

A une circulation

$\mathcal{C} = I$

29. **Tableau résumé des unités magnétiques.**

Système d'unités	Induction magnétique B	Champ magnétique H	Flux d'induction magnétique Φ	Potentiel magnétique $\mathcal{V}$
EMCGS	Gauss	Œrsted	Maxwell	Gilbert
Système international	Tesla	Ampère par mètre	Weber	Ampère
Rapport de grandeur	$1\ T = 10^4\ G$	$1 A/m = \frac{4\pi}{1000}\ Oe$	$1\ Wb = 10^8\ Mx$	$1\ A = \frac{4\pi}{10}\ Gb$

30. **Les trois grands chapitres de l'électromagnétisme.** — La décomposition en deux formules de l'expression générale de la force qu'exerce un élément de courant sur un élément de courant :

$$\overrightarrow{dF} = I\,\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}$$

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\overrightarrow{I'\,dl'} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

nous conduit à ouvrir deux grands chapitres :

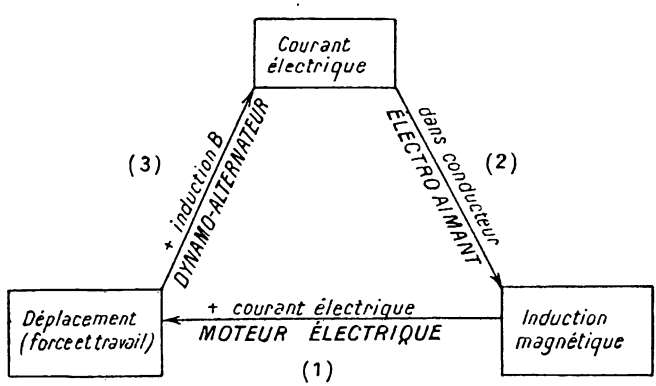
1° *Force* exercée par une induction magnétique sur un conducteur parcouru par un courant ;

2° *Induction magnétique* due à un courant électrique (déplacement d'électrons).

Un troisième chapitre sera constitué par l'étude du phénomène réciproque en quelque sorte du précédent :

3° *Courant électrique* dû à une induction magnétique et à un déplacement d'électrons.

Nous schématisons ci-dessous ces trois grands chapitres en indiquant les réalisations techniques auxquelles conduit leur étude :



Nous traiterons ces trois chapitres dans l'ordre 1, 2, 3.

CHAPITRE 2

FORCE ET TRAVAIL ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Force électromagnétique

1. **Force électromagnétique ou force de Laplace.** — Nous avons vu [1-4] qu'on désigne sous le nom de *force électromagnétique* ou force *de Laplace*, la force qu'un champ d'induction B exerce sur un élément de conducteur dl parcouru par un courant I.

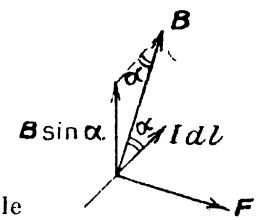


FIG. 2-1.

DIRECTION. — En vertu de son expression même

$$\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{I\,dl} \wedge \overrightarrow{B} = BI\,dl \sin\alpha \quad \text{en module}$$

(α = angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{I\,dl}$ et $\overrightarrow{B}$).

Cette force $\overrightarrow{dF}$ est normale au plan défini par $\overrightarrow{I\,dl}$ et $\overrightarrow{B}$ (fig. 1).

SENS. — Plaçons-nous dans le cas (le plus fréquent dans la réalité technique) où $\overrightarrow{B}$ est normal à l'élément $I\,dl\left(\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ et } \sin\alpha = 1\right)$. A ce moment les vecteurs $\overrightarrow{I\,dl}$, $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{dF}$ sont les arêtes, d'un trièdre trirectangle (figure 2). Le sens de la force dF est donné par la *règle des trois doigts de la main droite*. Si les trois premiers doigts de la main droite forment un trièdre trirectangle (fig. 3) :

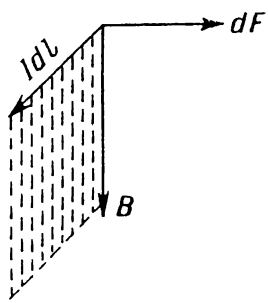


FIG. 2-2.

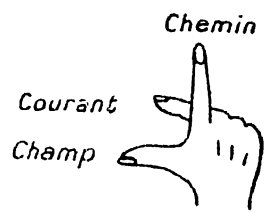


FIG. 2-3.

le *champ* (direction et sens de B) étant indiqué par le *pouce* ;

le *chemin* (sens de la force, étant indiqué par l'index) ;

le *courant* (sens du courant) devra être donné par la direction du *médius* (1).

MODULE. — Plaçons-nous dans le cas (fréquent dans la réalité technique) où un conducteur de longueur L est placé *normalement* à un champ d'induction *uniforme* B (fig. 4).

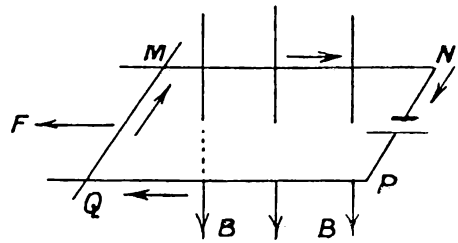


FIG. 2-4.

A ce moment les forces dF appliquées aux différents éléments dl du conducteur sont *parallèles* et *de même sens*. Elles s'ajoutent et l'on a :

$$F = \int_0^L dF = \int_0^L BI\,dl = BI\int_0^L dl = BIL.$$

Toute portion de conducteur de longueur L parcourue par un courant I et placée dans un champ d'induction magnétique B uniforme et normale à sa propre direction est soumise à la force électromagnétique :

$F =$	B	L	I
N	T	m	A

dont le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite.

EXPLICATION PHYSIQUE. — La force électromagnétique est de prime abord, surprenante par le fait qu'elle s'exerce dans une direction perpendiculaire à la fois à l'induction et au courant. Cela s'explique en considérant le spectre magnétique du champ résultant du champ créé par le courant lui-même et du champ uniforme dans lequel il est placé.

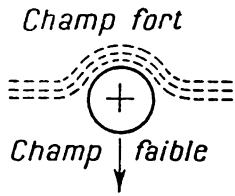


FIG. 2-5.

On voit clairement qu'en considérant les lignes de champ (ou les lignes d'induction) comme des fils élastiques tendus qui se repoussent perpendiculairement à leur direction, le conducteur tend à se déplacer dans le sens indiqué (sens de la force électromagnétique).

Il faut remarquer que c'est aux électrons en mouvement que s'appliquent les forces électromagnétiques ; mais ces électrons, liés à la matière par les lois de l'attraction coulombienne, entraînent

(1) Comme procédé mnémonique, on se rappellera que cette règle doit être appliquée avec la main *droite* en remarquant que la force électromagnétique explique le fonctionnement des machines motrices ou directrices (lettre *d*). On observe que les mots champ chemin courant sont rangés dans l'ordre alphabétique.

avec eux la matière. Tout se passe comme si la force était appliquée au conducteur lui-même.

REMARQUE I. — D'un côté du conducteur (fig. 5) l'induction propre au conducteur s'ajoute sensiblement à l'induction du champ agissant : c'est la zone des *champs forts* ; de l'autre côté l'induction propre au conducteur se retranche sensiblement de l'induction due au champ agissant : c'est la zone des *champs faibles*. Il apparaît qu'*un conducteur parcouru par un courant se déplace vers les champs faibles*.

REMARQUE II. — Nous rappelons l'action remarquable d'un champ magnétique sur la conductibilité de certains métaux au voisinage du zéro absolu (application au cryotron).

2. **Conséquence. Effet Hall.** — Soit une plaque parallélipipédique immobile d'épaisseur d parcourue par un courant allant de A' en A (fig. 6). Au centre, entre P et P' les filets de courants sont parallèles (perpendiculaires aux faces A et A') et la surface équipotentielle est un plan parallèle à A et A' et passant par PP'. C'est dire que $V_P - V_{P'} = 0$.

Faisons agir un champ d'induction B normalement à la plus grande face. Le conducteur est immobilisé. Les lignes de courant sont incurvées. Le plan précédemment défini n'est plus surface équipotentielle et l'on a $V_P - V_{P'} \neq 0$ (les nouvelles lignes de courant sont figurées en pointillé).

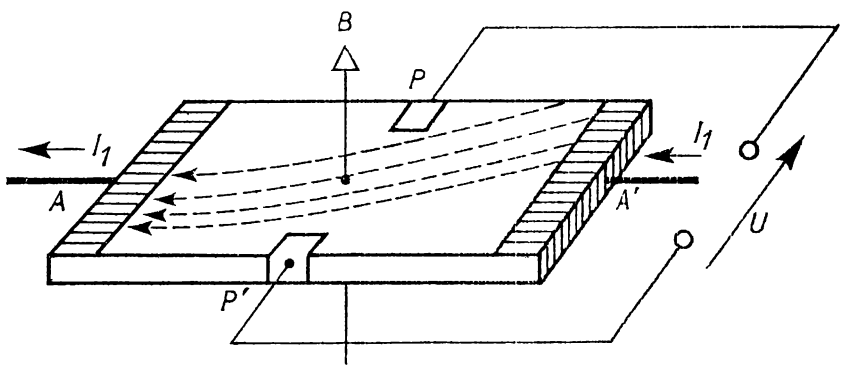


FIG. 2-6.

Tel est *l'effet Hall* particulièrement marqué dans les semi-conducteurs (germanium, sélénium, bismuth). L'expérience montre que la *tension de Hall* $V_P - V_{P'} = U$ peut être donnée par la relation :

$$U = kR_H I_1 B/d$$

I_1 = courant dit *de commande* entre A et A' ;
R_H = *constante de Hall* dépendant de la substance ;

d = épaisseur de la plaquette (dans le sens de l'induction B) ;

k = constante correspondant à la surface active de la plaquette, donnée par le produit $a'b'$ (surface du rectangle normal à B).

La constante de Hall d'une substance est d'autant plus élevée que sa concentration en porteurs semi-conducteurs (1) est plus faible.

La résistivité doit être faible (porteurs très mobiles) pour obtenir une puissance acceptable dans le circuit de sortie.

A titre d'exemple, pour une plaquette de germanium de $d = 2$ mm parcourue par un courant de 50 mA placée dans un champ de 0,2 T, la tension de Hall est égale à 54 mV.

Les substances qui donnent aujourd'hui les meilleurs résultats (constante de Hall élevée et faiblement influencée par la température) sont l'antimoniure ou l'arséniure d'indium et le phosphure arséniure d'indium.

Les applications de l'effet Hall sont en plein développement. Citons les principales.

1° A COURANT DE COMMANDE CONSTANT (fig. 6).

a) *Mesure des inductions magnétiques B.* La plaquette après étalonnage devient une *sonde de champ* particulièrement précieuse en raison de sa faible épaisseur pouvant s'abaisser à 0,1 mm et permettant la mesure de *B dans de faibles entrefers.*

b) *Mesure de forts courants continus* par la mesure de l'induction B qu'ils engendrent en un point bien défini. La figure 7 donne le schéma d'un capteur d'intensité.

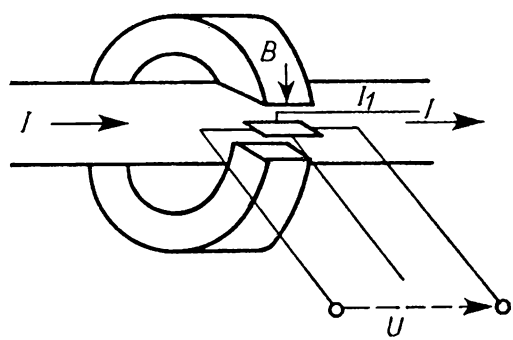


FIG. 2-7.

c) *Régulation d'un courant d'excitation* d'une machine : toute variation de l'induction B en un point de l'entrefer de la machine modifie la tension de Hall qui réagit sur le courant d'excitation pour ramener B à sa valeur primitive.

2° A INDUCTION B VARIABLE.

a) *Création d'une tension alternative* avec un courant de commande constant, une induction B variable, d'où résulte une tension de Hall alternative.

b) *Modulation d'une tension de Hall* par un courant de commande à haute fréquence et une induction à basse fréquence.

c) *Mesure d'une puissance* car un multiplicateur de Hall peut effectuer le produit (ou le quotient) de deux grandeurs physiques.

Il y a bien d'autres applications : analyse directe harmonique d'une onde périodique, production d'oscillations de tension à très basse fréquence par insertion de la

(1) *Électricité fondamentale* (5-8).

tension de Hall dans le circuit d'excitation d'une machine. Citons aussi le contrôle de la pureté d'un semi conducteur, car la moindre impureté diminue sensiblement sa résistivité.

3. **Force électrodynamique.** — Dans le cas particulier où l'induction $\vec{B}$ est due, non à un aimant, mais à un courant électrique, la force électromagnétique (force s'exerçant entre conducteurs parcourus par des courants) prend le nom de force *électrodynamique*.

Soient deux courants parallèles MN, PQ de *même sens*. La figure 7 montre que, là où se trouve PQ, l'induction B due à MN est perpendiculaire au plan des conducteurs et dirigée d'*avant en arrière* (+). Dès lors, en vertu de la règle des trois doigts de la main *droite*, la force à laquelle PQ est soumis est dirigée vers MN.

Le même raisonnement fait en considérant PQ comme créateur d'induction B et MN comme conducteur subissant la force électromagnétique nous montrerait que MN est soumis à une force dirigée vers PQ. En définitive :

deux courants parallèles et de même sens s'attirent ;

deux courants parallèles et de sens contraires se repoussent.

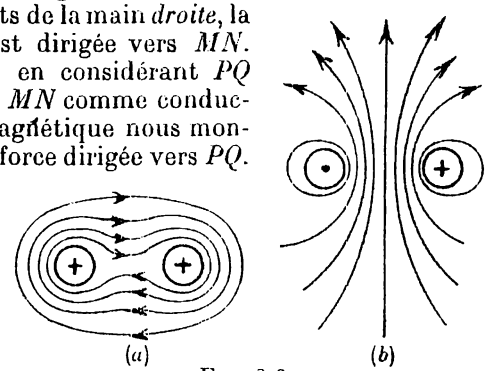


FIG. 2-8.

Quant au module de la force électrodynamique qui s'exerce par unité de longueur entre deux courants parallèles, nous en donnerons l'expression plus loin [15-5].

Explication physique. — Elle est donnée par les spectres magnétiques faciles à obtenir par l'expérience et par un graphique. Ils mettent en évidence (1) l'attraction de deux courants parallèles et de même sens (fig. 8 *a*) et la répulsion de deux courants parallèles et de sens contraires (fig. 8 *b*).

Travail électromagnétique

4. **Travail électromagnétique d'une portion de conducteur.** — Soit (fig. 9) un élément de courant $\overrightarrow{I\,dl}$ placé dans un champ d'induction $\vec{B}$ et subissant une petite translation dx. Le travail correspondant à ce déplacement a pour expression :

$$d\mathcal{C} = \vec{dF} \cdot \vec{dx} = \overrightarrow{I\,dl} \wedge \vec{B} \cdot \vec{dx} = I(\vec{dx} \wedge \vec{dl}) \cdot \vec{B}.$$

Or $\vec{dx} \wedge \vec{dl}$ est un vecteur normal au plan (hachuré) formé par dl et dx et dont le module est égal à l'aire dS du parallélogramme construit

(1) En considérant les lignes d'induction comme des fils élastiques tendus qui se repoussent latéralement.

sur dl et dx autrement dit l'aire balayée par l'élément dl au cours de sa translation :

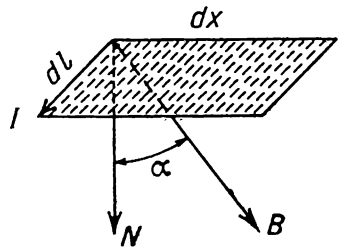


Fig. 2-9.

$$d\mathcal{T} = I\,\vec{dS}\cdot\vec{B} = I\,B\,dS\cos\alpha$$

(α = angle formé par $\vec{B}$ et par la normale N à dS) :

$$d\mathcal{T} = I \times \text{flux coupé par } dl = I\,d\Phi.$$

Le travail et le flux étant des grandeurs algébriques, si un conducteur parcouru par un courant I *coupe un flux* $\Delta\Phi$, le travail électromagnétique correspondant est :

$$\mathcal{T} = \int d\mathcal{T} = I\int d\Phi = \boxed{\underset{\text{A Wb}}{I\,\Delta\Phi}}$$

5. **Travail électromagnétique d'un circuit fermé.** — Considérons le circuit $MNPQ$ (fig. 4). Lorsque le côté soumis à la force électromagnétique $F = BLI$ subit un déplacement dx, le flux $\Delta\Phi$ qu'il coupe au cours de ce déplacement n'est autre que la *variation du flux embrassé par le circuit MNPQ*. Donc :

Un circuit fermé parcouru par un courant constant I et subissant un déplacement fini dans un champ développe un travail :

$$\boxed{\mathcal{T} = I\Delta\Phi}$$

$\Delta\Phi$ désignant la variation de flux embrassé par celui-ci.

Si ce circuit comporte n spires, $\Delta\Phi$ représente la variation de flux *total* embrassé (en désignant par flux total le produit du flux par le nombre de spires).

6. **Principe du flux maximal.** — Soit une spire plane de surface S parcourue par un courant constant I, placée dans un champ magnétique uniforme d'induction B et libre de se mouvoir *dans tous les sens*.

Si le flux Φ_1 qu'elle embrasse dans cette position :

$$\Phi_1 = \Phi_{e1} + \Phi_i$$

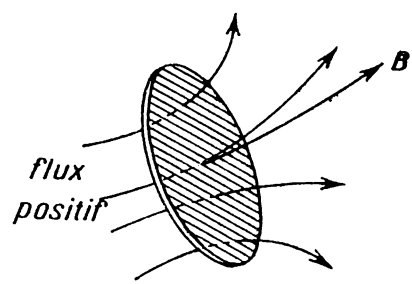


Fig. 2-10.

(Φ_{e1} = flux extérieur dans cette position initiale ;
Φ_i = flux propre au circuit c'est-à-dire créé par le courant I dans la spire)
devient dans une seconde position :

$$\Phi_2 = \Phi_{e2} + \Phi_i$$

le travail électromagnétique correspondant au passage de la position 1 à la position 2 s'exprime par :

$$W = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I(\Phi_{e1} - \Phi_{e2}).$$

Or nous avons montré [I-9] qu'un *déplacement spontané* (c'est-à-dire qui tend à se produire) correspond à un *travail positif*. La formule précédente montre que ce travail positif correspond à l'inégalité :

$$\Phi_2 - \Phi_1 > 0.$$

Attribuons au flux qui traverse la spire (fig. 10) :
— le signe (+) s'il a le sens de son flux propre Φ_i
— le signe (—) s'il a le sens opposé à son flux propre Φ_i
l'inégalité précédente peut se traduire ainsi :
— un flux positif tend à croître ;
— un flux négatif tend à décroître ;
autrement dit : le flux dans le sens du flux propre tend toujours à augmenter.

Ce fait est général et constitue le *principe du flux maximal* (1) qui s'énonce ainsi :

Tout circuit parcouru par un courant tend à embrasser le maximum de flux.

Notons que la position de flux maximal correspond à une *énergie potentielle minimale*. C'est donc une position d'équilibre *stable*.

7. Énergie potentielle d'un circuit électrique placé dans un champ magnétique. — Une augmentation de flux ($d\Phi > 0$) correspond à un travail électromagnétique positif c'est-à-dire *produit* et par conséquent à une diminution de l'énergie potentielle W_P possédée par le système constitué par le circuit-courant dans le champ magnétique.

Avec $d\Phi > 0$, il faut $d(W_P) < 0$.

La valeur absolue de dW_P étant le travail électromagnétique $I\,d\Phi$, on doit écrire en grandeur et en signe :

$$\boxed{W_P = -I\Phi}$$

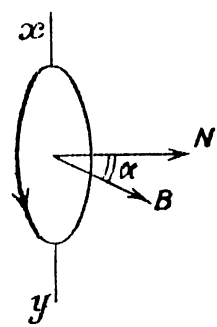


FIG. 2-11.

8. Moment électromagnétique d'un circuit électrique. — Soit une spire (fig. 11) de surface S parcourue par un courant I, susceptible de tourner autour de l'axe xy et placée dans un champ uniforme d'induction $\vec{B}$.

Si l'on désigne par α l'angle formé par $\vec{B}$ et par la normale positive (côté de la face nord) au plan de la spire et par Γ le moment du couple

(1) Ce principe se vérifie même quand la variation de flux embrassé est due, sans aucun champ extérieur, à la variation du flux propre Φ_i à ce circuit, variation due à la seule déformation de ce circuit.

qui, agissant sur la spire, tend à lui faire embrasser le flux maximal, une rotation $d\alpha$ de la spire autour de xy correspond à un travail :

$$d\mathcal{C} = \Gamma\, d\alpha = I\, d\Phi.$$

D'où l'expression du moment du couple :

$$\Gamma = I\frac{d\Phi}{d\alpha} = I\frac{d}{d\alpha}(\Phi) = I\frac{d}{d\alpha}(BS\cos\alpha) = ISB\sin\alpha$$

Si le circuit comporte n spires, le flux total embrassé est :

$$\Phi = nBS\cos\alpha$$

et le moment du couple a pour expression :

$$\vec{\Gamma} = n\vec{I}S \wedge \vec{B} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

en posant $m = niS$. Ce vecteur m axial (parce que $\vec{\Gamma}$ et $\vec{B}$ sont axiaux) est appelé moment *magnétique dipolaire* ou moment électromagnétique du circuit. On l'appelle aussi moment *ampérien* (1).

Le produit IS du courant dans un circuit par sa surface est également appelé *moment magnétique de double couche.* Voici pourquoi :

Considérons deux couches électriques de densités $+\sigma$ et $-\sigma$ parallèles, distantes de e (comme dans un condensateur plan) et entre lesquelles existe la D. D. P. U. Si nous désignons par C la capacité du condensateur plan, l'expression du couple maximal auquel est soumise la double couche dans un champ électrique E s'écrit (fig. 12) :

$$\Gamma_{max} = QeE = CUeE = \frac{\varepsilon_0 S}{e}UeE = US\varepsilon_0 E.$$

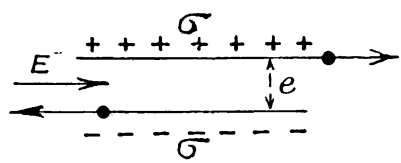


FIG. 2-12.

Le vecteur $\vec{B}$ correspondant au vecteur $\vec{E}$, l'expression du couple maximal auquel est soumis un circuit électrique dans un champ uniforme d'induction B doit s'écrire :

$$\Gamma_{max} = IS\,\mu_0 B.$$

C'est le rapprochement de IS et de US qui conduit à désigner ces deux produits par *moments* (magnétique ou électrique) *de double couche* (2).

DIRECTION. — C'est celle de la normale au plan du circuit (ne pas confondre avec le vecteur $\vec{\Gamma}$ qui est dirigé suivant xy). C'est une direction telle que le vecteur moment magnétique tend à prendre la direction de $\vec{B}$.

SENS. — Vers la face *nord* [13-17] du circuit, c'est-à-dire dans un sens

(1) Par opposition avec le moment *coulombien* qui s'exprime par $\mu_0 nIS$.

(2) Leurs dimensions IL^2 et UL^2 en font également des sortes de moments d'inertie respectivement électrostatique et électrocinétique.

tel que le flux du vecteur m soit positif. Ce sens est tel que (principe du flux maximal) le vecteur m *tend à se coucher sur le vecteur* B et dans le même sens.

A. — Applications aux appareils de mesures

9. **Conséquences du principe du flux maximal.** — Le principe du flux maximal explique non seulement le déplacement spontané d'un circuit parcouru par un courant dans un flux mais encore d'autres déplacements spontanés.

Déplacement des armatures des électroaimants. — Nous montrerons plus loin [chap. 5] que, lorsqu'une armature A d'électroaimant se rapproche de celui-ci (fig. 13), ou bien est avalée par la bobine (fig. 15), le flux à travers la bobine augmente. C'est donc dans les sens indiqués que ces déplacements tendent à se produire.

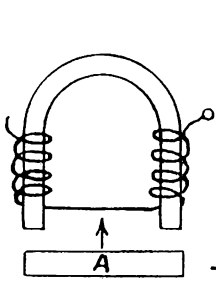


FIG. 2-13.

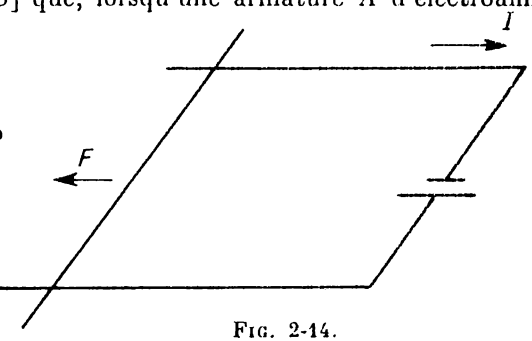


FIG. 2-14.

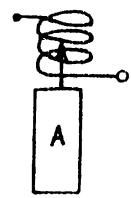


FIG. 2-15.

Tendance à l'agrandissement pour tout circuit parcouru par un courant. — Soit un circuit déformable, constitué par exemple par deux rails (fig 14) sur lesquels circule une barre cylindrique et qui sont alimentés par un générateur à leurs extrémités. Ce circuit n'est influencé par *aucun flux extérieur*.

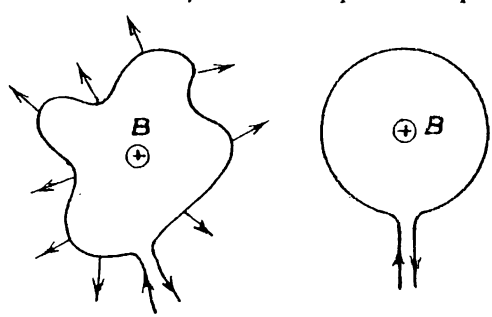


FIG. 2-16.

Mais il est traversé par le *flux* Φ_i *qu'il crée lui-même*. Comme il tend à être maximal, la barre s'éloigne du générateur afin qu'augmente la surface S du circuit quel que soit le sens du courant dans le circuit.

De même un circuit constitué par un fil très souple et parcouru par un courant suffisamment intense prend la forme de surface maximale (à longueur égale), c'est-à-dire un cercle (fig. 16) quel que soit le sens du courant (1).

C'est pour la même raison qu'un fusible mal maintenu tombe, avant fusion, en avant d'un tableau au moment d'un court-circuit (fig. 17), et que l'arc s'élève dans un parafoudre à cornes (fig. 18).

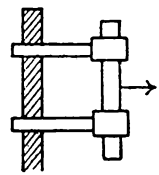


FIG. 2-17.

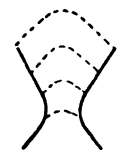


FIG. 2-18.

10. **Les forces électromagnétiques sont appliquées au fonctionnement de tous les moteurs électriques.** — Considérons un cylindre (fig. 19) capable de tourner autour de son axe entre les pôles d'un électroaimant et portant suivant ses génératrices des encoches garnies de portions de conducteurs, telles que *AB*. Supposons ces portions conductrices reliées entre elles et à une source extérieure de façon telle qu'elles soient parcourues par un courant électrique. Nous les appellerons des « brins actifs ». Nous observons que :

a) Les lignes d'induction perpendiculaires au fer du cylindre [4-17] sont radiales, c'est-à-dire dirigées vers l'axe du cylindre. Elles sont donc perpendiculaires aux brins actifs dans toutes leurs positions ; par suite les forces électromagnétiques exercées sur les brins sont toutes tangentielles.

b) Pour que le sens de la force électromagnétique à laquelle est soumis un brin actif demeure le même pendant un tour complet du cylindre, il faut que, pendant un tour complet, le sens *relatif* du champ et du courant dans le brin actif demeure le même.

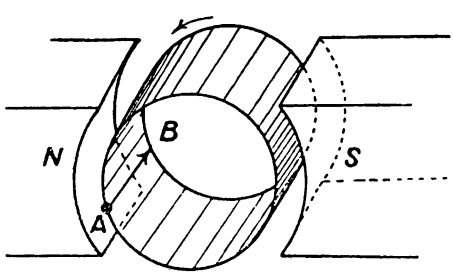


FIG. 2-19.

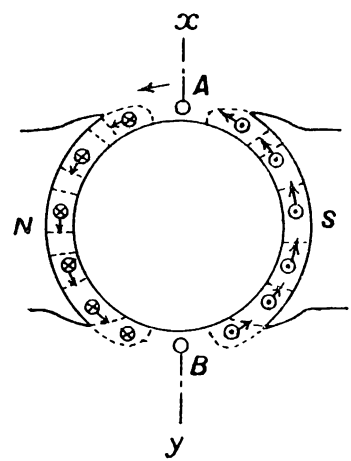


FIG. 2-20.

Par exemple, si dans la machine dont la figure 20 donne le schéma,

(1) Tout comme se déformerait un tuyau de caoutchouc contenant un fluide dont on fait croître la pression.

on réalise l'inversion du sens du courant dans un brin au moment où celui-ci franchit la ligne *neutre xy* (ligne suivant laquelle s'inverse le sens du champ par rapport au brin actif), la force électromagnétique exercée sur ce brin a toujours le même sens et l'ensemble des forces électromagnétiques exercées sur tous les brins engendre un couple sous l'action duquel le cylindre sera animé d'une rotation continue.

La machine schématiquement représentée transforme ainsi de l'énergie électrique en énergie mécanique. C'est un *moteur électrique.*

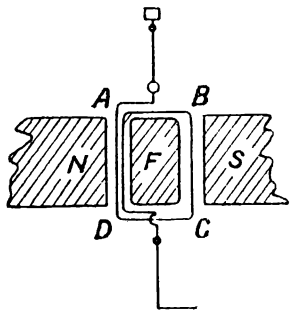


FIG. 2-21.

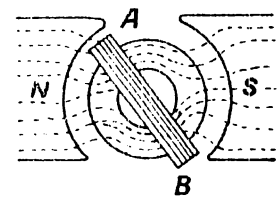


FIG. 2-22.

11. Les forces électromagnétiques sont appliquées aux appareils de mesures magnétoélectriques. — En opposant à la rotation de l'équipage mobile soumis à l'action des forces électromagnétiques un couple proportionnel à l'angle de rotation, on réalise un instrument permettant la mesure de l'intensité d'un courant électrique.

1° *Galvanomètre à cadre mobile.* — Soit un cadre *ABCD* rectangulaire de *n* spires (fig. 21), traversé par un courant *I* et plongé dans un champ d'induction *B* constante et *radial*, c'est-à-dire toujours dans le plan du cadre.

La figure 22 montre comment ce résultat est obtenu par insertion d'un cylindre de fer doux au milieu du cadre et entre les branches de l'aimant permanent qui crée le champ (fig. 22). Le cadre est suspendu par deux fils de torsion.

Soit : $AD = l$; $AB = b$.

Soit θ l'angle de rotation du cadre mesuré à partir de la position moyenne (fig. 23).

A partir de la position définie par l'angle θ, une rotation Δθ fait couper aux 2 branches verticales du cadre un flux :

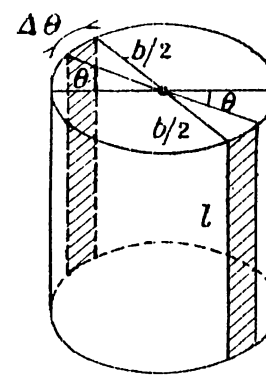


FIG. 2-23.

$$\Delta\Phi = 2n \times \frac{b}{2} \Delta\theta \times l \times B$$

(flux traversant les deux surfaces hachurées sur la figure 23), soit :

$$\Delta\Phi = G\Delta\theta$$

(en posant $G = nbl \cdot B = nBS = n\Phi$).

S désignant la surface du cadre et $G = n\Phi$ le flux total qu'il embrasserait si un champ d'induction uniforme B était perpendiculaire à son plan (1).

Le couple électromagnétique moteur est donc :

$$\Gamma = I\frac{\Delta\Phi}{\Delta\theta} = GI \quad \text{(indépendant de } \theta\text{)}.$$

Le couple résistant correspondant à l'angle θ est :

$$\Gamma_r = K\theta \quad (K = \text{constante de torsion du fil}).$$

A l'équilibre θ prend la valeur θ_1 telle que :

$$GI = K\theta_1. \qquad \text{D'où} \qquad I = \frac{K}{G}\theta_1 = K'\theta_1$$

$$\left(\text{en posant : } K' = \frac{K}{G} = \frac{K}{nBS}\right).$$

K' désigne la constante de l'appareil. Ainsi l'angle de déviation est proportionnel au courant, du moins dans la limite des déviations utilisées.

Les déviations du cadre peuvent être mesurées par voie optique, c'est-à-dire par déplacement sur une règle graduée en millimètres d'un trait lumineux ou spot réfléchi par un miroir porté par le cadre.

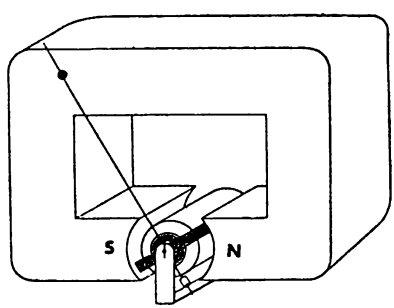


FIG. 2-24.

La *sensibilité* en intensité de l'appareil est d'autant plus grande que pour un même courant I traversant le cadre, la déviation θ de celui-ci est plus grande ; elle est donc définie par le rapport (2) :

$$\frac{\theta_1}{I} = \frac{nBs}{K}.$$

On voit que la sensibilité en intensité est d'autant plus grande que la constante de torsion du fil est plus faible, que le cadre a une plus grande surface, un plus grand nombre de spires, enfin que l'induction de l'aimant est plus grande. L'addition du cylindre de fer doux est très avantageuse à cet égard. On obtient ainsi dans l'entrefer des inductions de de 0,1 à 0,5 tesla.

(1) G n'est pas calculable à cause de la diminution de B aux deux extrémités du cylindre mais — et c'est là l'essentiel — G est constant pour un appareil donné.

(2) Pratiquement, on définit la sensibilité par le nombre de microampères correspondant à un déplacement du spot de 1 mm sur la règle. Cette sensibilité est de l'ordre de 0,1 μA par millimètre.

2° *Ampèremètres et voltmètres à cadre mobile.* — Le principe est le même : le couple de rappel est produit, non par un fil de suspension, mais par un ressort spiral ; le cadre est lié à une aiguille mobile devant un cadran (fig. 24). Ce sont les meilleurs appareils de mesure à courant continu, car leur graduation est à peu près régulière, ils consomment peu de puissance et par ailleurs conservent bien leur étalonnage.

12. **Les forces électrodynamiques sont appliquées aux appareils électrodynamiques.** — 1° ÉLECTRODYNAMOMÈTRES. AMPÈREMÈTRES ET VOLTMÈTRES ÉLECTRODYNAMIQUES. — Lorsque le champ magnétique dans lequel se trouve placé la bobine *b* mobile est lui-même créé par une bobine fixe parcourue par un courant, on dit que l'appareil est *électrodynamique.*

Mettons en série la bobine fixe *B* et la bobine mobile *b* (fig. 25) et distinguons deux cas.

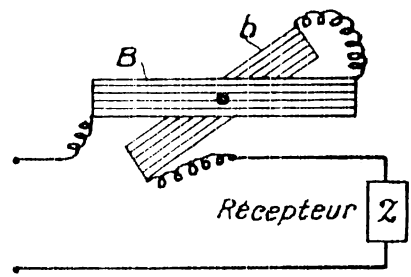


FIG. 2-25.

PREMIER CAS. — *La bobine b est ramenée toujours dans la position de flux embrassé minimal.* — Dans ce cas, en tout point, l'induction agissante (induction due à la bobine fixe) est proportionnelle au courant (1).

On peut donc écrire $B = \mu_0 H = K_1 I$.

D'autre part, la bobine mobile *b* a un moment électromagnétique [14-8] égal à :

$$nIs,$$

n = nombre de spires de la bobine mobile ;
s = surface de ces spires.

Le couple électromagnétique maximal exercé sur la bobine mobile aura donc pour expression :

$$\Gamma = B \times nIs = K_1 I \times nIs = K_1 nsI^2.$$

a) Dans des appareils dits *absolus*, le système mobile est le fléau d'une balance (fig. 27) portant à l'une de ses extrémités la bobine mobile *b*, à l'autre un plateau ; le couple résistant qui est opposé au couple électromagnétique et qui tend à ramener la bobine *b* dans la même position (équilibre du fléau) est dû à des masses marquées *m* placées dans le plateau.

(1) En effet, en chaque point de l'espace, l'induction d'un circuit parcouru par un courant I est égale à [1-16] :

$$\mu_0 \frac{1}{4\pi} I \frac{d\Omega}{dn}$$

Ω désignant l'angle solide sous lequel, du point considéré, on voit le contour du circuit et $\frac{d\Omega}{dn}$ la dérivée de cet angle prise dans la direction de l'induction.

La figure 26 représente l'électrodynamomètre *Pellat* dans lequel la bobine fixe est un solénoïde. Si on désigne par n_1 le nombre de spires par unité de longueur de celle-ci, par n le nombre de spires de la bobine b, on a à l'équilibre :

$$nIs \times \mu_0 n_1 I = mgl \qquad \text{d'où} \qquad I^2 = \frac{gl}{nn_1\mu_0 s} m$$

soit :

$$I = K\sqrt{m} \ (^1).$$

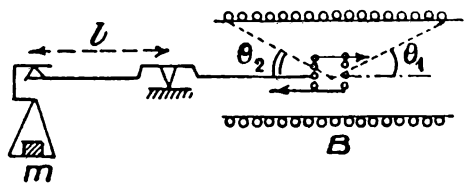


FIG. 2-26.

K désignant une constante caractéristique de l'instrument et calculable à partir de ses dimensions, c'est-à-dire de grandeurs mécaniques. L'appareil est donc un électrodynamomètre *absolu*.

La difficulté du calcul exact de K, même en corrigeant la formule précédente (1), a fait abandonner cet électrodynamomètre (2) au profit de l'électrodynamomètre *à bobines plates* ou *balance de Thomson*.

Deux bobines plates d'axe vertical sont suspendues (fig. 27) à un fléau de balance et chacune d'elles est placée entre deux autres bobines

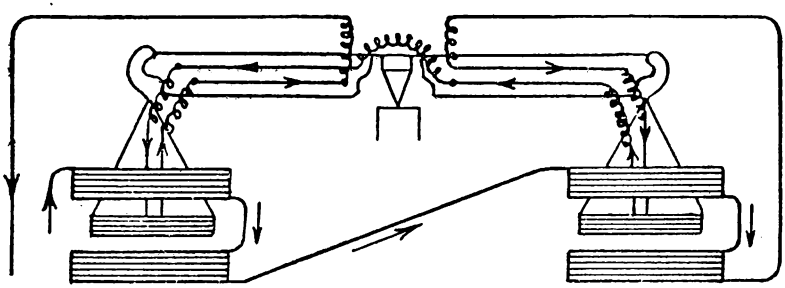


FIG. 2-27.

coaxiales. Les six bobines mises en série, sont traversées par le même courant I, les connexions étant telles que toutes les forces électrodynamiques tendent à faire tourner *dans le même sens* le fléau de la balance.

L'induction due à toutes les bobines étant, pour la même position d'équilibre, proportionnelle, en chaque point, au courant I, la force

(1) Nous montrerons [3-7] que, le solénoïde n'étant pas infiniment long, l'expression de l'induction sur son axe est en réalité :

$$B = \mu_0 n_1 I \ (\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \quad \text{(fig. 3-14)}.$$

(2) Car la formule ainsi corrigée ne peut s'appliquer que si le bobinage du solénoïde est parfaitement régulier.

exercée sur les bobines mobiles est proportionnelle à I^2. Le poids mg qu'il faut mettre pour rétablir l'équilibre est donc $mg = KI^2$.

La constante K n'est pas aussi facile à obtenir que dans l'appareil Pellat, mais peut se calculer exactement à partir des dimensions des bobines et de leurs positions respectives. La précision ainsi atteinte est celle du dix-millième.

b) Dans d'autres électrodynamomètres, le couple antagoniste Γ_r destiné à maintenir le cadre dans la même position qu'au repos est dû à la torsion d'un fil ou d'un ressort de suspension (fig. 28). On a, en désignant par α l'angle de torsion :

$$\Gamma_r = K'\alpha_1 \qquad (K' = \text{constante de torsion}).$$

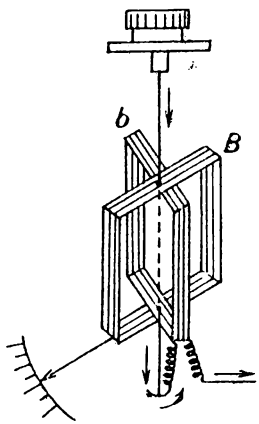


FIG. 2-28.

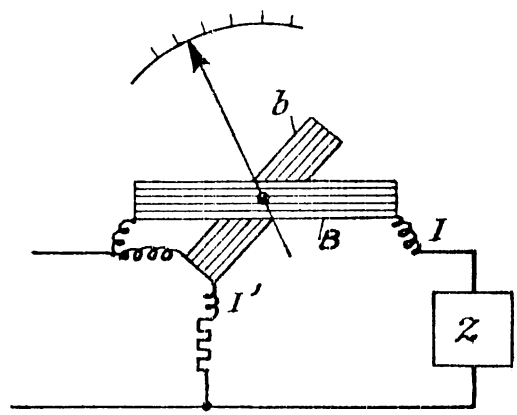


FIG. 2-29.

Donc, à l'équilibre correspondant au courant I, et avec $B = K_1 I$:

$$K_1 nsI^2 = K'\alpha,$$

ou :

$$\alpha_1 = \frac{K_1 ns}{K'} I^2 = K_2 I^2.$$

L'angle de torsion est proportionnel *au carré du courant.* La constante K_2 de l'appareil ayant été déterminée par un étalonnage préalable (en le comparant à un électrodynamomètre absolu mis en série dans un même circuit), l'électrodynamomètre ainsi constitué permet des mesures relatives.

En définitive, l'électrodynamomètre, beaucoup moins sensible que le galvanomètre, car l'induction due à la bobine fixe est beaucoup moins

(1) On remarque d'une part que les divisions de la graduation sont plus espacées au fur et à mesure que l'intensité croît (comme dans les appareils thermiques) et d'autre part qu'en réalité une fraction seulement du courant I passe dans la bobine mobile, car le ressort spiral qui amène le courant dans cette bobine ne pourrait pas supporter le courant I.

grande que celle de l'aimant permanent, est surtout intéressant comme appareil de *mesure absolue* des courants.

Deuxième cas. — *La bobine mobile n'est pas maintenue dans la même position.* — Elle est seulement rappelée vers sa position d'équilibre par un couple antagoniste dû à un ressort spiral. Dans ce cas, l'induction à laquelle est soumise la bobine mobile dans ses différentes positions *n'est plus proportionnelle à I* : elle est fonction de *I*. Dès lors, le couple est fonction de I^2 ainsi que l'angle de déviation α_1 correspondant au courant *I*. Comme dans les ampèremètres à cadre mobile [11], la bobine mobile porte une aiguille mobile devant un cadran (fig. 29).

L'appareil ainsi monté doit être étalonné par comparaison avec un appareil absolu (balance de Thomson). Comme il est à lecture directe, c'est un instrument industriel ; suivant son emploi, il sera appelé *ampèremètre* ou bien *voltmètre électrodynamique.* L'intérêt de ce modèle d'appareil réside en ceci :

a) Le sens de la déviation ne dépend pas du sens du courant (le sens relatif des courants ne change pas) ; l'appareil sera utilisable en courant alternatif.

b) La graduation n'est pas à la merci d'une variation d'aimantation d'un aimant permanent : l'instrument conserve strictement sa constante.

En fait, les appareils électrodynamiques sont les meilleurs appareils pour la mesure des courants alternatifs ; ce sont également les plus coûteux.

2° Wattmètres électrodynamiques. — Soit un appareil *Z* (générateur ou récepteur) dont nous proposons de mesurer la puissance électrique absorbée ou fournie.

Mettons la bobine fixe (fig. 29) en série avec l'appareil *Z* parcouru par le courant *I* et la bobine mobile en dérivation sur *Z*, c'est-à-dire sous la même tension *U* que celui-ci. Désignons par *I'* l'intensité du courant dans la bobine mobile de résistance *r*.

En nous reportant à l'expression ci-dessus du couple de l'électrodynamomètre, nous écrivons :

$$\Gamma = nsK_1 I' \times I = nK_1 sII' = K_2 II' \qquad (K_2 = nK_1 s = C^{te}).$$

Or, on a :

$$I' = \frac{U}{r}.$$

D'où :

$$\Gamma = K_2 \frac{U}{r} I = K_3 UI \qquad \left(K_3 = \frac{K_2}{r} = \frac{nK_1 s}{r} = C^{te}\right),$$

en désignant par K_3 la constante de l'instrument.

En définitive, l'instrument ainsi connecté :

a) S'il est monté comme l'électrodynamomètre (premier cas), sera tel que les angles de torsion α seront proportionnels au produit *UI*.

b) S'il est monté comme appareil industriel (à lecture directe), donne des indications *fonctions* du produit UI. Étalonné par comparaison avec le précédent, il indique directement la puissance UI absorbée ou fournie par l'appareil Z. On l'appelle donc *wattmètre électrodynamique.*

Nous avons montré [2-2] que des *wattmètres* récents *à effet Hall* sont parfois utilisés à la place des *wattmètres* électrodynamiques.

3° LOGOMÈTRES. — Un logomètre est constitué par deux cadres rectangulaires (fig. 30) suspendus sans torsion dans un champ directeur fixe. Celui-ci peut être dû à un aimant permanent ou bien à une bobine fixe.

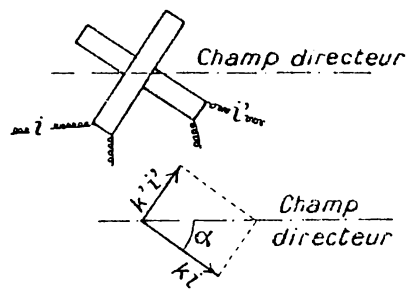


FIG. 2-30.

Le système mobile s'oriente de façon telle que la résultante des inductions KI et $K'I'$ (I et I' désignant les courants dans les cadres) soit parallèle à l'induction du champ directeur. On a alors :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{K'I'}{KI}.$$

La déviation α fait donc connaître le *rapport* des courants I et I'. Le principe du logomètre est appliqué à de nombreux appareils de mesure: ohmmètres, fréquencemètres, phasemètres, etc.

B. — Applications corpusculaires

13. **Action d'un champ magnétique sur un électron en mouvement.** — 1° *Équivalence d'un électron en mouvement et d'un courant électrique.* — Soit dl une portion de conducteur filiforme parcourue par un courant I c'est-à-dire par des électrons libres dont la vitesse d'ensemble est v. Désignons par Q la charge totale des électrons libres que renferme cet élément dl (fig. 31).

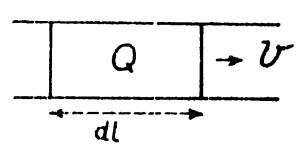


FIG. 2-31.

Les électrons qui, *pendant une seconde* ont traversé une section du fil, s'étalent sur une longueur v. On a donc :

$$I = \frac{Q}{\text{temps de remplissage de } dl} = \frac{Q}{dl/v} = \frac{Qv}{dl}$$

Si Q se réduit à la charge e d'un seul électron, on a :

$$I = \frac{ev}{dl} \quad \text{d'où} \quad \boxed{I\ dl = ev}.$$

2° *Force électromagnétique exercée par un champ magnétique sur un électron en mouvement.* — La formule de la force de Laplace [2-1] nous donne immédiatement la force $\vec{F}$ exercée par un champ d'induction $\vec{B}$ sur un électron de charge $(-e)$ en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ [1-4] quand $\vec{B}$ est normal à la vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{F} = I\,\vec{dl} \wedge \vec{B} = (-e)(\vec{v} \wedge \vec{B}).$$

14. **Oscilloscope cathodique.** — Nous avons montré (1) que le déplacement δ du spot dû à un pinceau d'*électrons* sur un écran fluorescent (déplacement dû à un champ électrique uniforme E) est proportionnel à ce champ et par suite à la D.D.P.U' entre les plaques qui créent ce champ.

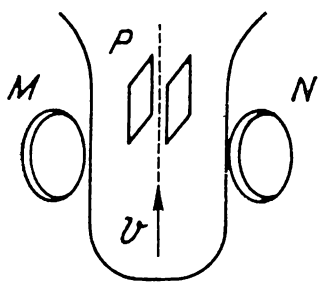


FIG. 2-32.

Supposons disposées de part et d'autre du tube cathodique deux bobines M et N dont l'axe *horizontal* est *perpendiculaire au jet électronique* (fig. 32). Ces bobines parcourues par un courant I engendrent sur une longueur a une induction *horizontale* B que nous supposerons *uniforme*.

La force électromagnétique $F = Bev$ exerce sur l'électron de masse m détermine une accélération γ qui a les caractères suivants :

— elle est toujours perpendiculaire à $\vec{v}$ et toujours dans le même plan normal à $\vec{B}$.

— elle est constante $\gamma = F/m = evB/m$.

La trajectoire de l'électron est donc un cercle de rayon ρ donné par $\gamma = v^2/\rho$ soit :

$v^2/\rho = evB/m$ d'où :

$$\rho = mv/eB = \frac{m}{eB}\sqrt{\frac{2eU}{m}}\ (2)$$

$$= \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}$$

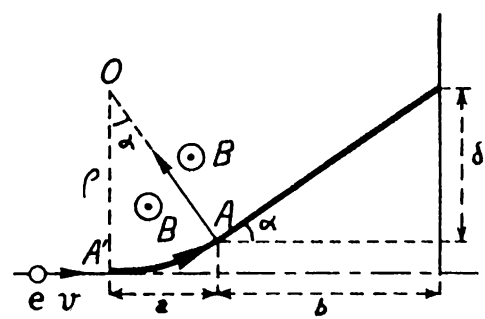


FIG. 2-33.

(U = potentiel accélérateur de l'électron entre l'anode et la cathode).

(1) *Électricité fondamentale.*

(2) Si U désigne la tension accélératrice des électrons, on a :

$$eU = mv^2/2 \quad \text{d'où} \quad v = \sqrt{2eU/m}.$$

En raison de la petitesse de a devant b (fig. 33) le déplacement δ' du spot peut s'exprimer par :

$$\delta' = b \operatorname{tg} \alpha \approx b \sin \alpha = \frac{ab}{\rho} = ab \times B \sqrt{\frac{e}{2mU}}$$

expression qui montre que, pour une tension U accélératrice, le déplacement δ' du spot est *proportionnel à l'induction* $\vec{B}$ *donc à* I.

En réalité B, n'est pas uniforme mais en chaque point du champ, B est proportionnel au courant I dans les bobines déviatrices. La théorie et l'expérience montrent que la proportionnalité de la déviation au courant I subsiste.

Dans l'oscilloscope cathodique le champ électrique $\vec{E}$ est *vertical*, l'induction magnétique $\vec{B}$ est *horizontale* et normale à $\vec{E}$. Il en résulte que

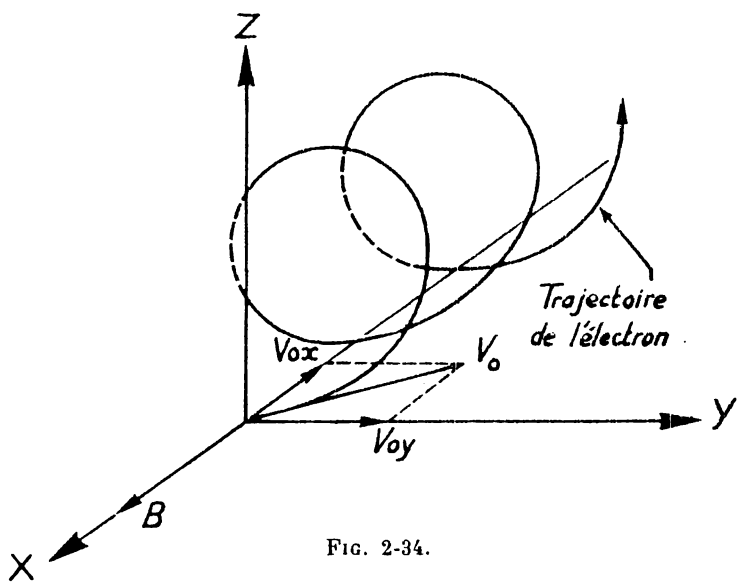


FIG. 2-34.

les *déviations* δ et δ' sont *rectangulaires*. Le déplacement du spot sur l'écran est donc le graphe d'une grandeur proportionnelle à U' en fonction d'une grandeur proportionnelle à I (1).

Cet appareil a d'innombrables applications. Il permet l'étude expérimentale de la variation de grandeurs — surtout périodiques — auxquelles des tensions électriques peuvent être rendues proportionnelles.

Il constitue aussi le tube d'un *téléviseur* où l'on préfère utiliser deux déflexions magnétiques qui donnent des déviations angulaires plus importantes que la déflexion électrostatique.

(1) Les deux déviations rectangulaires sont souvent électrostatiques (obtenues par deux champs électriques rectangulaires). L'étude détaillée de l'oscilloscope cathodique entre dans le cadre d'un cours de mesures électriques.

Remarque importante. Lorsque $\vec{B}$ et $\vec{v}$ ne sont pas perpendiculaires, le vecteur $\vec{v}$ peut être décomposé en deux composantes v_x colinéaire à $\vec{B}$ et $\vec{v_y}$ perpendiculaire à $\vec{B}$. Si v_y existait seule, l'électron décrirait un cercle dans le plan YOZ (fig. 34). Mais v_x détermine un déplacement suivant une direction parallèle à OX. Donc l'électron décrit une *hélice* d'axe parallèle à OX.

15. **Accélération de particules. Cyclotron.** — 1° *Propriété importante de la déviation magnétique.* — Exprimons le temps T que met un électron, (dans la déviation magnétique) pour parcourir le cercle de rayon ρ :

$$T = 2\pi\rho/v = 2\pi m/eB.$$

La période T ainsi que la vitesse angulaire :

$$\omega = 2\pi/T = eB/m$$

sont *indépendants de la vitesse initiale v de l'électron* ainsi que du *rayon* ρ du cercle décrit.

Dès lors : si des électrons de vitesses différentes pénètrent au même instant au même point O du champ, ils repassent tous ensemble en ce point, bien que leurs trajectoires soient de rayons différents.

Leurs énergies sont toujours exprimées en *électron-volts* avec $W = eU$:

$$1eV = 1{,}6 \times 10^{-19} \times 1 = \boxed{1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{J}}$$

1° *Accélérateurs de particules.* — Ce sont des dispositifs qui ont pour but de provoquer la désintégration d'un élément en modifiant la charge de son noyau, c'est-à-dire en lui enlevant, par *bombardement* une ou plusieurs particules électrisées.

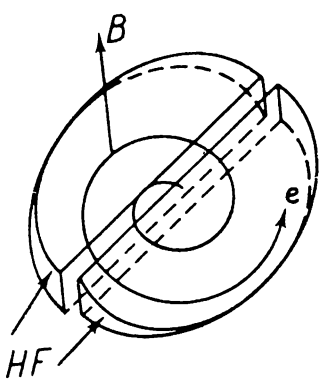


FIG. 2-35.

Ces particules peuvent être des *hélions* (atomes d'hélium privés de leurs deux électrons) ou des *protons* ou des *deutons* (noyaux d'atomes de deuterium). Il s'agit :

a) de les lancer avec une vitesse suffisante ;

b) de les utiliser sur une longueur de trajectoire assez grande pour accroître leur probabilité de rencontre avec un noyau de la substance à transmuter.

2° *Cyclotron.* Un cylindre plat (fig. 35) en métal non magnétique est séparé en deux parties écartées de quelques centimètres et reliées aux deux bornes d'un circuit oscillant capable d'établir entr'elles une D. D. P. élevée (de l'ordre de 50 kV). L'ensemble est placé dans une enceinte non magnétique dans laquelle on peut faire un *vide très poussé.*

Au centre du cylindre plat une source de particules (fig. 36) donne à celles-ci une faible vitesse horizontale normale à l'induction magnétique $\vec{B}$ d'un puissant électroaimant (induction verticale qui baigne toute l'étendue de la boîte).

Entre les deux *Dees* [1] on établit une D. D. P. sinusoïdale U, donc un champ électrique E sinusoïdal qui, à chaque passage d'un Dee à l'autre, communique à la particule électrisée un accroissement de

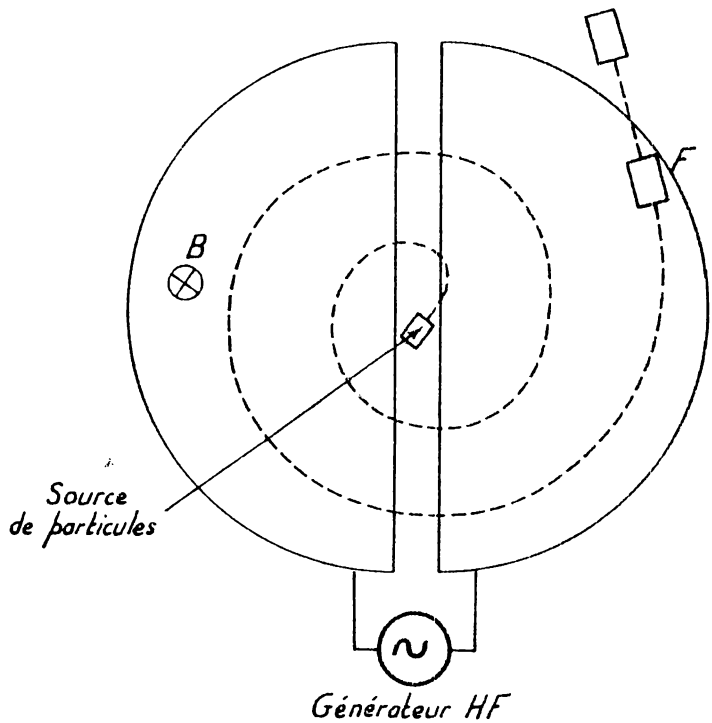


FIG. 2-36.

trajectoire circulaire prend alors un rayon R supérieur mais le temps qu'elle met pour parcourir un demi-cercle est constant [15] :

$$T/2 = \pi m/Be.$$

Dès lors, pour qu'après chaque demi-cercle parcouru, le champ électrique E soit maximal dans le sens favorable à l'accélération, il suffit que la *fréquence* de la tension sinusoïdale soit :

$$f = 1/(T/2) = Be/\pi m = \frac{v}{2\pi R}$$

(condition de résonance).

[1] Nom donné à une demi-boîte parce qu'elle a la forme d'un D.

D'où :

$$v = 2\pi\, fR$$

et, si on désigne par R_n le rayon de la circonférence décrite après le $n^{\text{ième}}$ demi-tour, le principe de la conservation de l'énergie permet d'écrire :

$$\frac{1}{2}\, m(v_n^2 - v_{n-1}^2) = \frac{1}{2}\, m(2\pi f)^2[R_n^2 - R_{n-1}^2] = e\hat{U}.$$

Quand la particule atteint la fenêtre F, elle a sa vitesse maximale. Elle est alors utilisée pour un bombardement.

Remarque. — L'augmentation relative de la masse avec la vitesse des particules suivant la relation d'Einstein :

$$\text{masse apparente} = m/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$$

a) limite l'énergie des particules accélérées par le cyclotron ;

b) finit par détruire la concordance de phase entre les particules en rotation et le champ accélérateur.

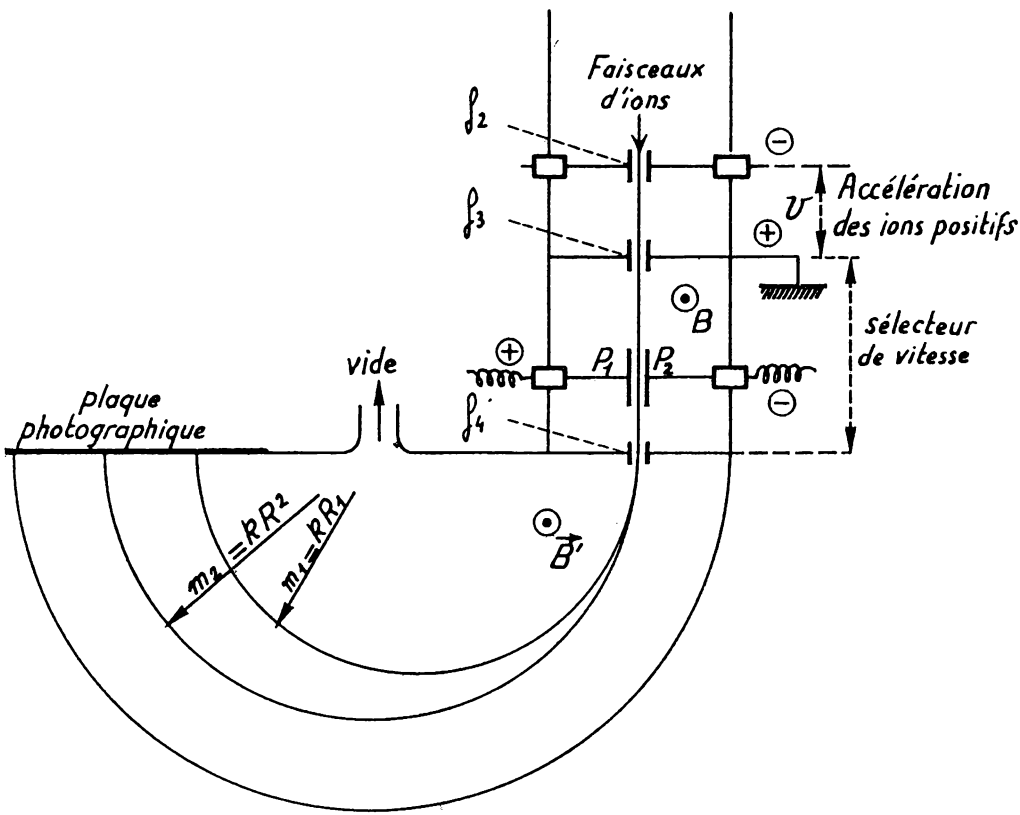


Fig. 2-37.

C'est pourquoi, dans un perfectionnement appelé *synchrocyclotron* on ajuste la fréquence de la tension d'accélération sur la fréquence des particules. On a pu doubler ainsi l'énergie maximale communiquée aux corpuscules de l'artillerie atomique.

16. **Spectrographe de masse.** — Des ions *positifs* de charge e de masse m sont accélérés (fig. 37) par le champ produit par les fentes f_2 et f_3. Ils partent alors de f_3 avec la vitesse v telle que $eU = 1/2mv^2$ (U = D. D. P. entre les deux fentes f_2 et f_3).

1° *Sélecteur de vitesse.* — A partir de f_3, les ions sont soumis à l'action simultanée d'un champ électrique $\vec{E}$ normal à leur vitesse $\vec{v}$ et d'une induction magnétique $\vec{B}$ normale à $\vec{v}$ et à $\vec{E}$. Là-dessus, ils atteignent une fente f_4 alignée avec f_2 et f_3.

Ils ne passent à travers la fente f_4 que si les forces Ee (électrique) d'une part et Bev (magnétique) d'autre part sont égales et opposées. Donc seuls passeront à travers f_4 les ions dont la vitesse $\vec{v}$ est telle que :

$$Ee = Bev \quad \text{soit} \quad v = E/B.$$

Les ions auront tous la même vitesse sans avoir la même énergie. Le dispositif décrit est donc un *sélecteur de vitesse.*

2° *Localisation des ions.* — A la sortie de f_4, les ions sont soumis à une seconde induction $\vec{B'}$ parallèle à l'induction $\vec{B}$. Ils décrivent alors une trajectoire circulaire de rayon $R = mv/eB'$ [15] soit :

$$R = m(E/B)/eB' = mE/BB'e.$$

D'où nous déduisons :

$$m = (BB'e/E) \times R = KR$$

(K = constante de l'instrument).

Au terme de leur déviation de 180°, les ions frappent une plaque photographique ; et, comme ils ont tous la *même vitesse*, leur distance de focalisation à la fente d'entrée f_4 est *proportionnelle à la masse m.* Tel est le principe du *spectrographe de masse.*

CHAPITRE 3

INDUCTION MAGNÉTIQUE DUE AUX COURANTS ÉLECTRIQUES

1. Une expérience fondamentale. — Accrochons au plateau M d'une balance hydrostatique une bobine b_1 dans laquelle, grâce à des fils très souples nous pouvons faire passer un courant i_1 et équilibrons par une tare placée dans l'autre plateau.

Disposons sous la bobine b_1 une bobine b_2 dans laquelle nous faisons passer un courant i_2. Nous observons alors que :

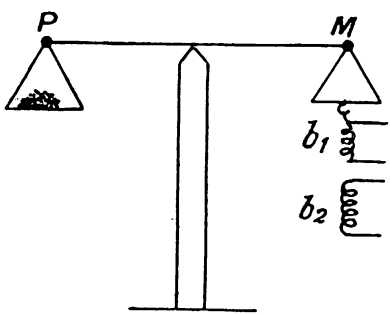


FIG. 3-1.

a) Si le courant i_2 a un sens convenable, la balance s'incline vers b_2 et pour rétablir l'équilibre, il faut placer dans le plateau P une masse m_1.

b) Si à ce moment, on fait croître le courant i_2 (le courant i_1 demeurant constant), l'équilibre est détruit et, pour le rétablir il faut placer dans le plateau P une masse $m_2 > m_1$.

c) Insérons alors dans b_2 un noyau de fer. Il faut pour rétablir l'équilibre placer dans P une masse $m_3 \gg m_2$.

Nous pouvons conclure :

1° Un courant électrique (dans b_2) crée un champ d'induction B variable avec l'intensité du courant dans b_2.

2° Un noyau de fer doux engagé dans une bobine a pour effet d'accroître fortement l'induction B due à celle-ci (1).

Nous avons vu [2-10] dans les moteurs électriques et nous verrons dans la plupart des applications électromécaniques, que nous aurons besoin d'inductions *réglables* et *intenses*. L'expérience précédente nous montre que, pour les obtenir il suffit d'un conducteur parcouru par un *courant électrique* et du *fer*.

Laissons de côté, dans une première étude, le fer.

(1) L'induction magnétique qui est le titre du présent chapitre est le phénomène suivant lequel du fer doux placé dans un champ magnétique *devient lui-même un aimant*. Ne pas confondre avec le vecteur B qui a une autre signification déjà précisée.

Induction magnétique due aux courants dans l'air

2. **Formules de base.** — Nous nous proposons de déterminer par la voie mathématique pour certains circuits de forme géométrique et en des points déterminés les expressions des inductions dues à des courants électriques dans l'air. Nous utiliserons, à cet effet, les formules établies dans le paragraphe précédent, savoir :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl \sin\alpha}{r^2} \qquad \mathcal{V} = \frac{I}{4\pi}\Omega \qquad \mathcal{C}_B = \mu_0 I.$$

Donnons à la formule de Biot et Savart une forme plus commode en faisant (fig. 2) :

$$dl \sin\alpha = r\,d\theta \qquad \text{et} \qquad r = a/\cos\theta.$$

Elle devient :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{r\,d\theta}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\theta}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,d\theta\,\frac{\cos\theta}{a}$$

de telle sorte que les *formules de base* seront :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\cos\theta\,d\theta}{a}$$

Biot et Savart

$$\mathcal{V} = \frac{I}{4\pi}\Omega$$

Potentiel magnétique

$$\mathcal{C}_B = \mu_0 I$$

Théorème d'Ampère

Nous utiliserons, dans chaque cas, la plus commode des trois formules précédentes.

Quant à l'*étude expérimentale qualitative*, nous utiliserons la méthode du *spectre magnétique* qui consiste à saupoudrer de limaille de fer un carton placé horizontalement dans le champ magnétique. Chaque grain devient un aimant, donc s'oriente dans le sens du vecteur B au point où il se trouve de telle sorte que les alignements des grains de limaille dessinent les lignes d'induction dans le plan du carton.

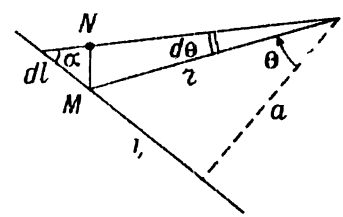


FIG. 3-2.

3. **Induction due à un électron en mouvement.** — Nous avons montré [2-13] qu'un électron de charge (— e) et de vitesse $\vec{v}$ équivaut à un élément $I\,dl$ de courant I, soit

$$I\,dl = ev$$

Dès lors la formule de Biot et Savart nous donne l'induction B due, à la distance r, à un électron de vitesse v :

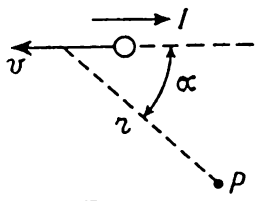


Fig. 3-3.

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \sin \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev \sin \alpha}{r^2} \text{ (fig. 3)}$$

et la force de Laplace exercée par un électron de vitesse $\vec{v}$ en M sur un électron de vitesse $\vec{v'}$ en N a pour expression :

$$\vec{F} = -e\vec{v'} \wedge \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} e^2 \frac{\vec{v'} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{U})}{r^2}$$

$$(MN = r)$$

$$\vec{MN} = r\vec{U}$$

4. **Induction due à un fil rectiligne indéfini.** — 1° E*n un point extérieur.* — Le spectre magnétique, obtenu en saupoudrant de limaille de fer une feuille de carton horizontale traversée par un fil vertical parcouru par un courant électrique, a l'allure indiquée (fig. 4). Les lignes d'induction sont concentriques à la trace du fil sur le carton. Le sens de ces lignes est déterminé au moyen d'une aiguille aimantée suspendue par un fil.

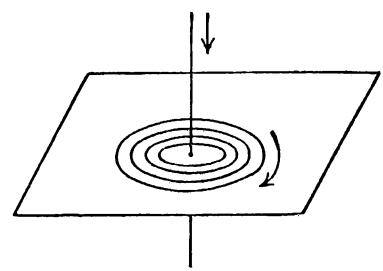


Fig. 3-4.

Le sens d'une ligne d'induction concentrique au courant est celui de la rotation d'un tire-bouchon progressant dans le sens de ce courant.

Le module du vecteur induction est le même (par raison de symétrie), en tous les points situés à la même distance a du conducteur rectiligne.

Le théorème d'Ampère nous donne la circulation du vecteur $\vec{B}$ le long de la courbe fermée constituée par la circonférence de rayon a :

$$\mathcal{C}_B = \mu_0 I = B \times 2\pi a$$

(le spectre magnétique a montré que $\vec{B}$ est tangent à la circonférence)

D'où :

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}}.$$

Remarque. — Le sens des lignes d'induction montre pourquoi l'angle de deux conducteurs parcourus par un même courant (fig. 5) tend à s'ouvrir. En effet, les lignes d'induction dues aux deux côtés de l'angle

sont parallèles et *de même sens* à l'intérieur de l'angle. Suivant les règles de Faraday [1-3], elles se repoussent et tendent à ouvrir l'angle.

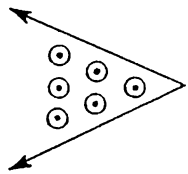


FIG. 3-5.

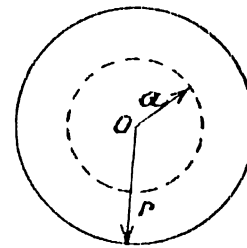


FIG. 3-6.

2° *En un point intérieur* (fig. 6). — Si la densité de courant J à l'intérieur du fil est uniforme (courant continu ou alternatif de basse fréquence), on a :

$I = \pi r^2 \times J$ (r = rayon du fil).

Le théorème d'Ampère, appliqué à la circulation du vecteur B à la distance a du centre, nous donne :

$\mathcal{C}_B = \mu_0 \times$ courant enlacé

$$= \mu_0 I \frac{a^2}{r^2} = B \times 2\pi a$$

$$B = \frac{\mu_0 I a}{2\pi r^2}$$

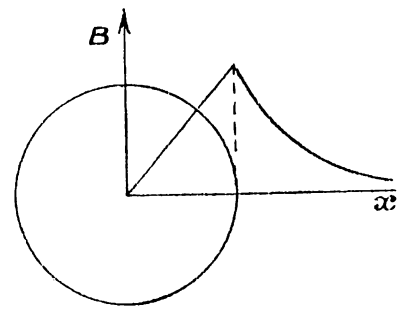


FIG. 3-7.

L'induction est proportionnelle à la distance à l'axe du fil. Elle prend sa valeur maximale à la surface du fil, puis décroît à l'extérieur comme l'induction d'un fil infiniment mince de façon inversement proportionnelle à la distance à l'axe (fig. 7). Soulignons bien que ce résultat n'est valable que *si la densité de courant est uniforme.*

5. **Application à l'expression de la force électrodynamique entre deux fils parallèles indéfinis.** — Soient deux fils AB, CD rectilignes parallèles indéfinis distants de a. L'induction due à AB en tous les points de CD est :

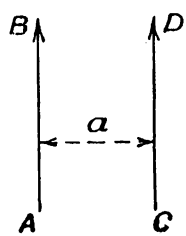


FIG. 3-8.

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$

et la force exercée par AB sur l'*unité de longueur de CD* est :

$$F = B \times 1 \times I_2 = \boxed{\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi a}}.$$

Par exemple, entre deux conducteurs parallèles situés à 10 cm l'un de l'autre, tous deux parcourus par un courant de 100 A, s'exerce *par mètre* une force électrodynamique :

$$F = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10^{4}}{2\pi \times 0{,}1} = 0{,}02 \text{ newton.}$$

Cette force est très petite, mais dans le cas d'un court-circuit dans un enroulement (courant très intense dans des spires presque jointives), elle peut prendre des valeurs énormes et oblige à consolider les enroulements des machines.

6. **Induction d'un courant circulaire en un point de son axe.** — *Direction et sens.* — Le spectre magnétique d'un courant circulaire est donné par la figure 9. La ligne d'induction passant par le centre du cercle est dirigée suivant son axe. Son sens peut être obtenu en appliquant à un élément la règle du tire-bouchon de Maxwell, mais on s'aperçoit alors qu'on peut lui donner une forme inverse, plus pratique :

Le sens de l'induction axiale est celui dans lequel se déplace un tire-bouchon tournant dans le sens du courant.

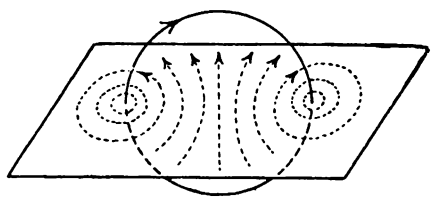


Fig. 3-9.

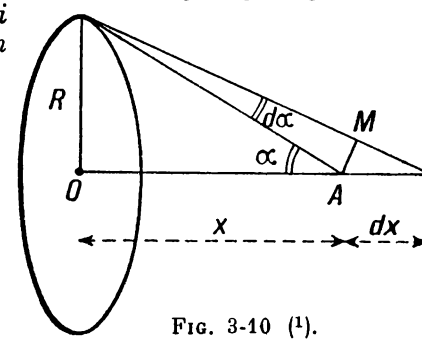


Fig. 3-10 (1).

Module de l'induction en un point de l'axe (fig. 10).

Soit I l'intensité d'un courant circulaire de centre O et de rayon R. Déterminons l'induction B qu'il crée en un point A *situé sur son axe* à une distance x du centre. Appliquons la formule du potentiel magnétique. En A il a pour expression :

$$\mathcal{V} = \frac{I}{4\pi}\Omega = \frac{I}{4\pi} \times 2\pi\,(1 - \cos\alpha) = \frac{I}{2}(1 - \cos\alpha)$$

(Ω = angle solide sous lequel de A on voit le cercle).

D'où, en dérivant par rapport à x (2) :

$$H = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} = -\frac{I}{2}\sin\alpha\,\frac{d\alpha}{dx}$$

avec $\sin\alpha = \frac{R}{a}$ et $AM = |a\,d\alpha| = dx \sin\alpha$, d'où $d\alpha = \frac{dx}{a}\sin\alpha$. (— 1)

Soit :

$$H = \frac{I}{2}\frac{R}{a}\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{I}{2}\frac{R^2}{a^3}.$$

(1) La distance du point A au cercle est a.

(2) Puisque, par raison de symétrie, le vecteur H a nécessairement la direction OA

Le module de B est donc :

$$B = \mu_0 \frac{IR^2}{2a^3}$$

Cas particulier. Le point A est au centre du cercle. On a alors : $a = R$, d'où :

$$B = \mu_0 \frac{I}{2R}$$

Si le circuit circulaire comporte n spires, l'induction est multipliée par n. Elle a pour expression :

$$B = \mu_0 \frac{nI}{2R}.$$

Application : **Bobines de Helmholtz.** V. fin chapitre § 26.

7. **Induction d'un solénoïde en un point de son axe.** — On appelle *solénoïde* un système de courants circulaires de même rayon, de même intensité et de même sens distribués à intervalles réguliers le long d'un axe qui passe par tous les centres et qui est perpendiculaire au plan des courants (fig. 11). Leur ensemble forme une nappe cylindrique de courant de densité linéique constante.

FIG. 3-11.

On réalise pratiquement ce cas au moyen d'un enroulement hélicoïdal de faible pas (spires jointives).

Étude expérimentale qualitative. Direction et sens du vecteur $\vec{B}$.
Réalisons le spectre magnétique d'un enroulement hélicoïdal à pas

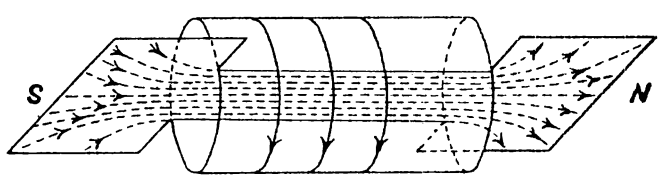


FIG. 3-12.

constant (fig. 12). Nous observons que les lignes d'induction parallèles à l'axe à l'intérieur du solénoïde s'épanouissent ensuite comme à la sortie d'un pôle d'aimant. Nous avons figuré, en appliquant la règle du tire-bouchon, le sens des lignes d'induction.

Expression de l'induction $\vec{B}$.
Nous appliquerons encore la loi d'Ampère (formule 2). Soit n_1 le nombre de spires *par unité de longueur*, I le courant dans le solénoïde. Une bobine

plate de $n_1\,dx$ spires située à la distance x d'un point M (fig. 13) de l'axe produit en ce point un potentiel élémentaire :

$$\mathcal{V} = \frac{n_1\,dx}{4\pi} I\Omega = \frac{n_1\,dx}{4\pi} I \cdot 2\pi\,(1 - \cos\alpha),$$

soit : $\mathcal{V} = \frac{n_1\,dx}{2} \cdot I\,(1 - \cos\alpha)$.

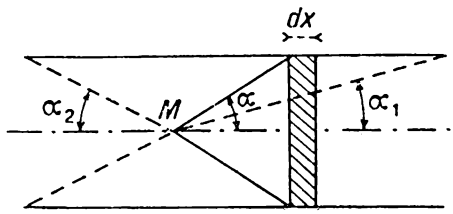


FIG. 3-13.

Le champ magnétique dH élémentaire produit par la tranche $n_1\,dx$ en M a par raison de symétrie la direction de l'axe du solénoïde. Il a donc pour expression :

$$dH = -\frac{d}{dx}(\mathcal{V}) = -n_1\,dx\,\frac{I}{2} \cdot \sin\alpha\,\frac{d\alpha}{dx} = \frac{n_1 I}{2}\sin\alpha\,d\alpha.$$

Les inductions magnétiques $dB = \mu_0\,dH$ dues à toutes les tranches $n_1\,dx$ considérées sur le solénoïde, sont dirigées suivant l'axe et s'ajoutent. Nous obtiendrons donc l'induction B au point M due à tout le solénoïde en intégrant cette expression :

$$B = \int dB = \int \mu_0\,dH = \mu_0\frac{n_1 I}{2}\int_{\alpha_1}^{\pi-\alpha_2} \sin\alpha\,d\alpha = \mu_0\frac{n_1 I}{2}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2).$$

Si le *solénoïde est très long*, on a sensiblement $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = 1$:

$$B = \mu_0\frac{n_1 I}{2}(1 + 1) = \mu_0 n_1 I$$

Si la longueur du solénoïde est au moins égale à 6 fois son diamètre, on a, au point situé au milieu du solénoïde et sur son axe :

$$\text{tg}\,\alpha_1 = \text{tg}\,\alpha_2 = 1/6 \qquad \text{d'où} \qquad \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = 0{,}986.$$

L'erreur relative commise en adoptant la formule du solénoïde infiniment long est donc inférieur à 15/1 000.

La formule du solénoïde très long s'applique donc sans erreur sensible à une bobine cylindrique dès que sa longueur est assez grande par rapport à son diamètre.

8. **Induction d'un tore électromagnétique en un point de sa ligne d'induction moyenne.** — On appelle *tore électromagnétique* un tore recouvert par un enroulement régulier parcouru par un courant. Ce qu'il a de remarquable — et le spectre le fait apparaître — c'est que les lignes d'induction, circonférences concentriques, sont toutes situées à l'intérieur des spires de l'enroulement — de telle sorte que *l'induction à l'extérieur est nulle.*

Pour déterminer l'induction $\vec{B}$ sur la circonférence moyenne du tore, nous appliquerons la formule (3) [2]. Si n désigne le nombre total de spires, l la longueur de la circonférence moyenne, on a :

Circulation du vecteur $\vec{H}$ effectuant un tour complet sur la circonférence moyenne : nI.

Autre expression de cette circulation : $H \times l$, car, par raison de symétrie, le champ a la même valeur H en tous les points de la circonférence moyenne et par ailleurs sa direction, tangente à cette circonférence, est toujours celle du déplacement. On a donc :

$$nI = Hl \qquad \text{et} \qquad H = \frac{nI}{l} = n_1 I,$$

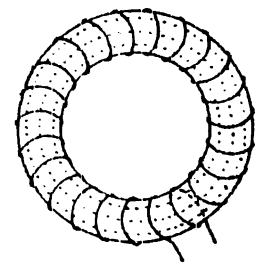


FIG. 3-14.

en désignant par n_1 le nombre de spires par mètre de longueur comptée sur la circonférence moyenne. La formule est donc la même que celle du solénoïde indéfini, résultat que nous pouvions prévoir en remarquant que le tore — dépourvu d'extrémités libres — équivaut à un solénoïde assez long pour que, d'un point à l'intérieur, les faces extrêmes soient vues sous un angle très petit (1).

Nous désignons par densité linéique j le nombre d'ampères nI par unité de longueur mesurée suivant l'axe de la bobine. Nous notons que *le champ H d'un tore électromagnétique ou d'un solénoïde très long est égal à sa densité linéique* $H = j$.

REMARQUE I. — Dans toutes les formules donnant l'indu tion due à un courant, on a le quotient d'un courant par une longueur.

REMARQUE II. — Les bobines à noyau d'air donnent des inductions de quelques centiteslas, mais il est difficile d'aller beaucoup plus loin.

Calculons l'épaisseur e d'une bobine longue capable de créer, suivant son axe, une induction $B = 0{,}1$ tesla avec, dans ses spires, une densité de courant :

$$J = 2 \times 10^6 \text{ A/m}^2.$$

La densité linéique est le courant qui traverse un rectangle de 1 m de long et d'épaisseur e. On a donc :

$$0{,}1 = B = \mu_0 j = \mu_0 \times J \times e \times 1.$$

D'où :

$$e = \frac{0{,}1}{\mu_0 J} = \frac{0{,}1}{4\pi \times 10^{-7} \times 2 \times 10^6} = \frac{1}{8\pi} \text{ m, soit environ 4 cm.}$$

9. **Induction magnétique terrestre.** — *L'induction magnétique terrestre est uniforme dans un espace restreint.* Quand on suspend une aiguille aimantée par son centre de gravité, elle prend la direction de l'induction du champ terrestre. L'expérience permet ainsi de déterminer les lignes d'induction du champ terrestre ; on constate qu'elles sont parallèles (du moins dans un espace restreint). Donc, dans un tel espace l'induction magnétique terrestre est *uniforme.*

Angles caractéristiques de sa direction. — L'induction magnétique terrestre est caractérisée en direction par deux angles.

(1) On peut, aussi bien dire : le solénoïde infiniment long équivaut à un tore électromagnétique de rayon infini.

a) La *déclinaison d* qui est l'angle formé par le méridien géographique *A V S* (plan vertical contenant la direction NS géographique) avec le méridien magnétique (plan vertical contenant la direction de la boussole sur pivot vertical (fig. 15).

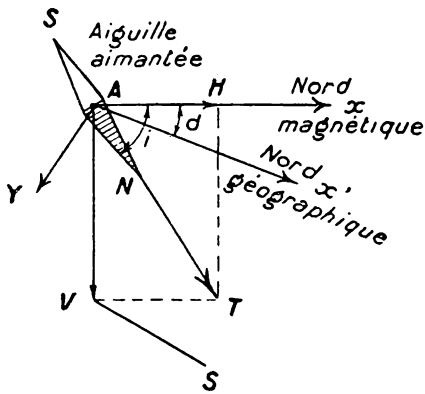


Fig. 3-15.

b) L'*inclinaison i*, angle formé avec le plan horizontal par la direction *A T* de l'induction magnétique terrestre.

La déclinaison est mesurée par la *boussole de déclinaison* (fig. 16) qui porte, sur un même bâti, une boussole et un théodolite ; l'inclinaison se mesure au moyen d'une *boussole d'inclinaison* tournant autour d'un axe horizontal devant un cercle gradué vertical (fig. 18).

La déclinaison et l'inclinaison varient d'un point à l'autre de la Terre. A Paris, la déclinaison est actuellement environ 12°30′ occidentale, l'inclinaison 65°. Ces nombres varient en outre avec le temps : en dehors des variations accidentelles et rapides dites *orages magnétiques*, ils présentent des variations périodiques, diurnes et séculaires.

Induction du champ terrestre. — Les deux composantes du vecteur induction *A T* du champ terrestre (fig. 15) sont :

la composante verticale *A V* qui vaut, en France, 46 μT environ ;

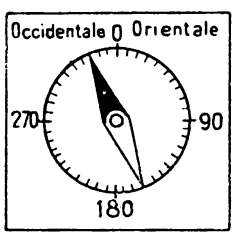


Fig. 3-16.

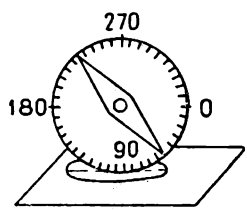


Fig. 3-17.

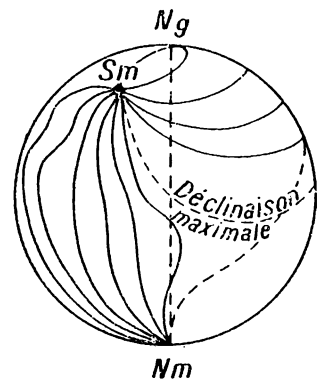


Fig. 3-18.

la composante horizontale *AH* dont la valeur est d'environ 20 μT.

La Terre se comporte, en fait, comme un aimant dont les pôles magnétiques ne coïncident pas avec les pôles géographiques (fig. 18). On ne connaît pas exactement l'origine du champ magnétique terrestre.

(1) Grâce au fait que les poteries d'argile conservent la direction de l'aimantation au moment où elles ont été cuites, on a pu connaître la direction de l'induction terrestre à une époque très lointaine.

I. — Induction et champ dans un milieu magnétique indéfini

Nous nous proposons maintenant d'étudier les modifications des grandeurs précédemment étudiées lorsque l'espace entre les circuits électriques est rempli entièrement par un milieu magnétique.

10. **Perméabilité magnétique.** — Imaginons qu'un ensemble de circuits, tout d'abord dans le vide, soit *complètement immergé* dans un liquide magnétique homogène et isotrope tel que le chlorure ferrique.

L'expérience montre que toutes les forces entre circuits *deviennent* μ_r *fois plus grandes* que dans le vide.

Ce facteur μ_r caractéristique de la substance magnétique s'appelle *perméabilité relative* de cette substance (sous-entendu : par rapport au vide). Cette grandeur, rapport de deux forces, est évidemment sans dimensions. C'est un *simple nombre.*

Les formules [2] que nous avons obtenues pour les circuits électriques sont donc valables à condition de substituer à la perméabilité du vide μ_0 le produit $\mu_r\mu_0$. Nous écrirons :

$$\underset{\text{Ampère)}}{dF = \frac{\mu_r\mu_0}{4\pi} II' \frac{dl\, dl' \sin\alpha \sin\alpha'}{r^2}} \quad \text{et} \quad \underset{\text{(Biot et Savart}}{dB = \frac{\mu_r\mu_0}{4\pi} I' \frac{dl'}{r^2} \sin\alpha'}$$

Nous poserons par la suite :

$$\boxed{\mu = \mu_r\, \mu_0}$$

μ désignant la perméabilité *absolue* (douée de dimensions) du milieu magnétique.

Nous écrirons donc dans un milieu magnétique :

$$\boxed{B = \mu H}$$

avec :

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi \times 10^{-7}} \frac{B}{H} = \boxed{796\,000 \overset{\text{T}}{\underset{\text{A/m}}{\frac{B}{H}}}}$$

11. **Hypothèse d'Ampère. Courants ampériens. Courants vrais.** — Ampère a émis l'hypothèse que la modification apportée par le milieu magnétique aux forces existant entre des circuits électriques est due à l'intervention dans le milieu de courants internes circulant dans les molécules, doués de toutes les propriétés générales des courants dans les conducteurs, mais ne dépensant aucune énergie.

Nous les désignerons sous le nom de *courants ampériens* (et par abréviation : *ampériens*) pour les distinguer des courants dans les conducteurs que nous appellerons *courants vrais.*

Ces courants ampériens sont, dans les théories électroniques, les courants orbitaux dus aux électrons qui, dans un atome, tournent autour du noyau.

Sans doute des travaux récents ont montré que *l'électron tourne sur lui-même* et c'est son *spin* (moment cinétique) qui, plus que les moments orbitaux (dus à la rotation des électrons autour du noyau) produit l'effet des ampériens.

Mais cela ne change rien à la théorie que nous ferons de l'aimantation d'une substance, car il existe toujours un mouvement orbital équivalent, au point de vue magnétique, à la rotation d'un électron sur lui-même. Nous tiendrons les courants ampériens pour une réalité physique.

Dans cette conception, *tous les résultats obtenus en supposant les circuits électriques dans le vide sont valables, à condition de tenir compte à la fois des courants vrais et des courants ampériens.*

Les formules de Biot et Savart, celle du théorème d'Ampère sont *universelles* à condition de tenir compte à la fois des courants vrais et des courants ampériens.

12. **Signification de la perméabilité magnétique dans l'hypothèse d'Ampère.** — Considérons, dans la substance magnétique, la circulation $\mathcal{C}_B$ du vecteur $\vec{B}$ le long d'un parcours fermé et soit :

ΣI_a la somme des courants ampériens traversés
ΣI_v — — vrais —
ΣI — — totaux —

Dans le vide, le long du même parcours on aurait écrit :

$$\mathcal{C}_B = \mu_0 \Sigma I_v$$

et, dans le milieu magnétique :

$$\mathcal{C}_B = \mu_0 \mu_r \Sigma I_v$$

soit, aussi bien, dans l'hypothèse d'Ampère :

$$\mathcal{C}_B = \mu_0 \Sigma I$$

Nous avons donc l'égalité :

$$\mu_0 \mu_r \Sigma I_v = \mu_0 \Sigma I$$

soit : $$\mu_r = \frac{\Sigma I}{\Sigma I_v} = \frac{\text{somme des courants totaux traversés}}{\text{somme des courants vrais traversés}},$$

rapport qui donne une remarquable signification physique à la perméabilité relative.

13. **Vecteur aimantation dans un milieu magnétique.** — Soit, autour d'un point, un petit volume $d\nu$ de substance aimantée. Ce volume contient un très grand nombre d'ampériens dont les moments magnétiques se composent géométriquement.

Soit $d\vec{\mathfrak{M}}$ la résultante de tous ces moments magnétiques.

Le quotient :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dv}$$

qui est un moment magnétique par unité de volume s'appelle *vecteur aimantation* au point considéré.

14. **L'aimantation M est le champ des sources locales.** — Soit (fig. 19) une bobine constituée par un fil enroulé en hélice et parcouru par un courant I. Si cette bobine dont chacune des n spires a pour surface S est placée *normalement* à un champ uniforme d'induction $\vec{B}$, elle est soumise à un couple :

$$\Gamma = nISB = \frac{nI}{l} \times Sl \times B = \frac{nI}{l} \times V \times B$$

l = longueur de la bobine

V = volume intérieur de la bobine.

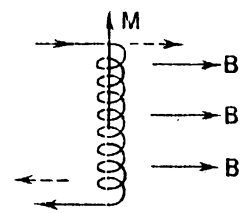


FIG. 3-19 (1).

Comme nI/l est un champ H [3-8] le moment électromagnétique apparaît comme le produit d'un champ par un volume.

Dès lors l'aimantation M (moment électromagnétique par unité de volume) est de *même nature qu'un champ*. Et comme, dans une substance aimantée le moment magnétique d'un certain volume dV est dû aux ampériens, on est en droit de conclure :

Dans une substance aimantée, les sources locales (ampériens) ajoutent au champ qui existait en un point P lorsque le milieu était le vide, un champ d'aimantation M.

En ce point nous aurons un champ

$$\vec{H} = \vec{H}_V + \vec{M}$$

H_V = champ (dans le vide) dû aux sources lointaines de champ.

Dans le cas général (le plus fréquent dans la réalité technique) les vecteurs $\vec{H}_V$ et $\vec{M}$ ont la même direction et l'on écrit :

$$H = H_V + M$$

Tout se passe comme si l'on était dans le vide avec un champ accru H. Donc l'induction B (au lieu de $\mu_0 H_V$) a pour expression :

$$B = \mu_0 H = \boxed{\mu_0(H_V + M)}$$

(1) Le couple est représenté par les flèches en pointillé.

15. **Propriétés des vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{H}$ dans un milieu magnétique.** — 1° *L'induction $\vec{B}$ est toujours à flux conservatif.* — De ce qui précède, il résulte que, dans un milieu magnétique, l'induction $\vec{B}$ en un point résulte de la composition de tous les vecteurs $\vec{B}$ obtenus en appliquant la formule de Biot et Savart à *tous les courants agissants*, savoir les courants vrais *et les courants ampériens.*

Nous avons montré [1-10] que le caractère conservatif du flux du vecteur $\vec{B}$ résulte de la formule de Biot et Savart. Donc *le flux du vecteur $\vec{B}$ est conservatif quels que soient les milieux dans lesquels on le considère.*

C'est la propriété très importante du vecteur B. On peut la traduire en écrivant :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \text{I-18}$$

2° *Le théorème d'Ampère ne s'applique qu'aux courants vrais.* — Nous avons montré [3-12] que, dans un milieu magnétique indéfini, on a :

$$\mathcal{C}_B = \mu \Sigma I_v$$

et puisque en tout point on a $H = B/\mu$:

$$\mathcal{C}_H = \frac{1}{\mu} \mathcal{C}_B = \Sigma I_v$$

La circulation du vecteur $\vec{H}$ mesure uniquement l'intensité totale des courants vrais traversés par la courbe de circulation.

On voit que la circulation totale du vecteur $\vec{H}$ s'exprime plus simplement que celle du vecteur $\vec{B}$. Elle ne fait intervenir *que les courants vrais.*

Dans un espace quelconque *non sillonné de courants vrais*, la circulation de H suivant une courbe fermée est *nulle.*

16. **Milieu magnétique parfait. Susceptibilité magnétique.** — Nous avons montré [3-10] que, dans un milieu homogène et isotrope, les forces magnétiques s'exerçant entre des courants sont par rapport aux forces s'exerçant dans le vide, toutes multipliées par la perméabilité relative μ_r de ce milieu.

Lorsque cette *perméabilité relative* est *constante* (indépendante des courants agissant les uns sur les autres), on dit que le milieu magnétique est *parfait.*

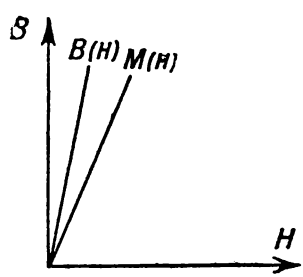


FIG. 3-20.

La courbe $B(H)$ est une droite passant par l'origine ($B = \mu_r \mu_0 H$). En vertu de la relation [14] :

$$B = \mu_0(H + M) \quad \text{d'où} \quad M = \frac{B}{\mu_0} - H$$

la courbe $M(H)$ passe également par l'origine. On peut écrire :

$$M = \chi H \qquad (\text{avec } \chi = C^{te}). \ (1)$$

(1) M et H étant des grandeurs de même nature, χ est un simple nombre comme μ_r.

Le coefficient χ est appelé *susceptibilité magnétique* du milieu. Comme H et M ont la même direction, il est facile d'établir la relation entre χ et μ_r :

$$B = \mu_0(H + M) = \mu_0(H + \chi H) = \mu_0 H (1 + \chi).$$

D'où :

$$1 + \chi = \frac{B}{\mu_0 H} = \mu_r \qquad \boxed{\mu_r = 1 + \chi}$$

II. — Induction et champ à la surface de séparation de deux milieux magnétiques

17. Loi de la réfraction des lignes d'induction. — Pour chacun des vecteurs B et H, il y a, au passage à travers la surface de séparation de deux milieux, continuité de l'une des composantes et discontinuité de l'autre. En effet, si on considère une portion ds de la surface de séparation, la conservation du flux d'induction permet d'écrire :

$$B_{n_1}\, ds = B_{n_2}\, ds$$

(B_{n_1} et B_{n_2} = composantes normales de B dans les milieux 1 et 2) ; $B_{n_1} = B_{n_2} = B_n$ d'où (fig. 21) :

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{Bt_1}{Bt_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad \text{et par suite} \quad \frac{B_{t_1}}{\mu_1} = \frac{B_{t_2}}{\mu_2} \quad \text{et} \quad H_{t_1} = H_{t_2}$$

la composante tangentielle de H et la composante normale de B se conservent.

On a de même :

$$B_n = H_{n_1}\mu_1 = H_{n_2}\mu_2 \qquad \text{d'où} \qquad H_{n_1}/H_{n_2} = \mu_2/\mu_1$$

les composantes normales de H sont dans le rapport inverse des perméabilités.

La réfraction des lignes d'induction a une conséquence importante.

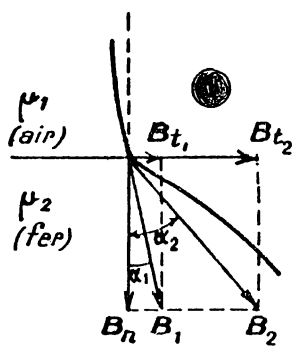


FIG. 3-21.

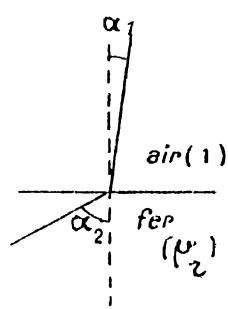


FIG. 3-22.

Dans l'air les lignes d'induction sont presque perpendiculaires au fer.

Supposons, en effet, que le milieu 1 est l'air, le milieu 2 le fer. Nous avons $\mu_1 = \mu_0$ et $\mu_2 = \mu_r\mu_0$, d'où $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{1}{\mu_r}$.

Dans ces conditions :

$$\frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{1}{\mu_r} \quad (\mu_r = \text{perméabilité relative du milieu 2}).$$

Or nous montrerons que, pour le fer, μ_r peut atteindre des valeurs élevées. Il en résulte que l'on a :

$$\text{tg } \alpha_1 < \text{tg } \alpha_2.$$

Avec la valeur $\mu_r = 3\,000$, voici quelques valeurs correspondantes de α_1 et α_2 :

$\alpha_1 =$	0°	40″	2′10″	6′	13′	1°5′	6°30′	90°
$\alpha_2 =$	0°	30°	60°	80°	85°	89°	89°50′	90°.

Ces valeurs montrent que, dans l'air, les lignes d'induction sont *presque* [1] *perpendiculaires au fer*, même lorsque, dans le fer, elles sont très obliques par rapport à la surface.

18. Résumé des propriétés des vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{H}$.

Vecteur B	Vecteur H
Toujours à flux conservatif.	Flux conservatif seulement dans le vide ou dans un milieu magnétique isotrope unique.
Sa circulation fait intervenir tous les courants.	Sa circulation ne fait intervenir que les courants vrais.
Ne dérive d'un potentiel que dans le vide.	Dérive d'un potentiel (fonction multiforme) en milieu magnétique ou non.
Sa composante normale se conserve.	Sa composante tangentielle se conserve.

On voit que les propriétés des vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{H}$ sont opposées. Les actions *subies* (aussi bien par un courant que par un aimant) sont conditionnées par B, au contraire les effets *produits* par un courant ou un aimant sont toujours conditionnés par H.

Le premier est à *flux conservatif*, le second à *circulation conservative* (eu égard aux seuls courants vrais).

La possibilité d'appliquer à la circulation de $\vec{H}$, sur n'importe quel circuit fermé, le théorème d'Ampère est la *justification majeure de la définition du vecteur H*.

[1] Alors que les lignes de force électriques sont normales à la surface des conducteurs, les lignes d'induction magnétiques ne sont pas perpendiculaires à la surface du fer. La distribution des charges électriques à la surface d'un conducteur est telle que celle-ci soit équipotentielle. Le potentiel magnétique à la surface d'un corps aimanté n'est pas constant.

III. — Induction et champ dans le noyau d'un tore électromagnétique

19. **Noyau aimanté et densité linéique due aux ampériens.** — Soit un noyau cylindrique (fig. 23) aimanté suivant son axe. Ses ampé-

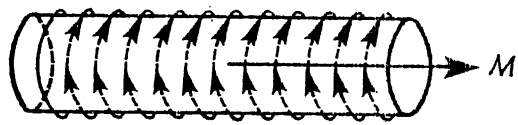


FIG. 3-23.

riens circulent donc dans des plans perpendiculaires à son axe. Or (fig. 24) les effets de tous les ampériens se détruisent suivant les lignes de contact de tous leurs circuits respectifs.

En définitive le champ magnétique dû aux ampériens peut être considéré comme créé par une *nappe de courant* entourant le noyau c'est-à-dire circulant sur sa surface latérale. Nous désignerons dorénavant par j_a la densité linéique équivalente aux ampériens du noyau.

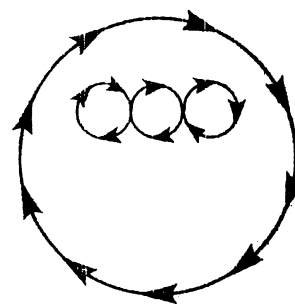


FIG. 3-24.
Coupe du noyau normalement à son axe.

20. **Champ et induction dans le noyau de fer d'un tore électromagnétique.** — Disposons un noyau de fer dans un tore électromagnétique (fig. 25). Nous avons alors deux densités linéiques à considérer.

a) La densité linéique $j = nI/l$ des courants vrais.

b) La densité linéique j_a due aux ampériens (ces ampériens circulent sur la surface du tore dans des plans normaux à l'axe du tore.

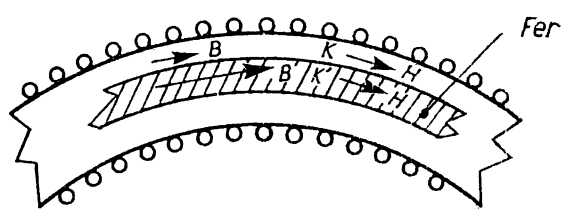


FIG. 3-25.

1° *Le champ H est en un point du noyau de fer, le même que dans l'air.* — C'est parce que la circulation du vecteur H est indifférente aux ampériens [3-15].

On peut dire aussi bien : quand on passe de l'air (point K) dans le

noyau (point K') le champ H qui est tangentiel au fer se conserve (tangentiel) au passage à travers la surface du fer [3-17].

2° *L'induction B est beaucoup plus grande dans le fer que dans l'air.* — C'est parce que la circulation du vecteur B tient compte des ampériens [3-12] et qu'un parcours fermé constitué par une circonférence dans le fer englobe à la fois les courants vrais et la nappe de courant équivalente aux ampériens.

Nous aurons maintenant pour l'induction B résultant, dans le fer de *toutes les sources de champ* :

$$B = \mu_0(j + j_a) = \mu_0(H + M) \qquad [3\text{-}14]$$

Or $M = j_a$ est *beaucoup plus grand* que $H = j$ donc B est fortement accru.

On aurait pu dire aussi bien : le vecteur $\vec{B}$ est tangent au noyau des deux côtés de la surface de fer et nous avons montré [3-17] que le rapport des composantes tangentielles de B est égal au rapport des perméabilités de part et d'autre de la surface du fer. On a donc :

$$B_{fer}/B_{air} = \mu_r/1 \qquad B_{fer} = \mu_0 H \times \mu_r$$

$$\boxed{B = \mu H} \qquad (\mu_r \text{ très grand})$$

L'induction est multipliée par μ_r. Ce résultat s'applique évidemment à la bobine constituée par un solénoïde très long comportant un noyau de fer.

IV. — Induction et champ d'une bobine à noyau court

21. Induction à l'intérieur et à l'extérieur d'un barreau aimanté. — Représentons les lignes d'induction d'un barreau aimanté (fig. 26). Elles sortent du métal côté nord, entrent côté sud et les tubes d'induction ont une section plus grande à l'extérieur qu'à l'intérieur du métal.

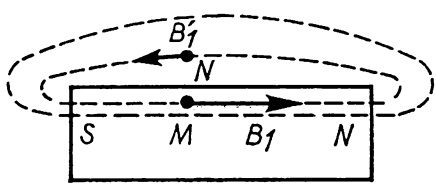


FIG. 3-26.

Il apparaît que l'induction B'_1 en un point N extérieur au barreau est opposée à l'induction B_1 en un point M. De plus $B'_1 \ll B_1$.

22. Bobine à noyau court. Champ démagnétisant. — Supposons tout d'abord la bobine très longue c'est-à-dire créant un champ égal à j (densité linéique du courant vrai). Engageons dans celle-ci un noyau court. Il devient un aimant et, en vertu de ce qui précède l'induction en N est (fig. 27) :

$$B = \mu_0 j - B'_1.$$

C'est dire que le champ en N n'est plus j, mais, (en divisant par μ_0).

$$H = \frac{B}{\mu_0} = j - \frac{B'_i}{\mu_0}.$$

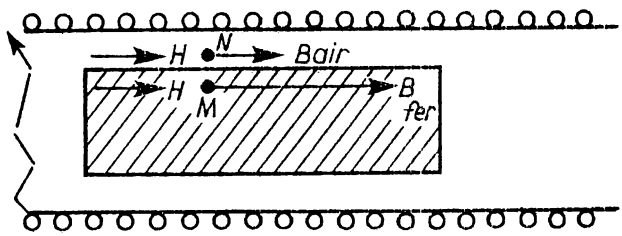


FIG. 3-27.

Ce champ H est tangentiel au fer du noyau. Il se conserve donc à l'intérieur du fer [3-17]. Dès lors le *champ réellement agissant* dans le fer est :

$$H = j - \frac{B'_i}{\mu_0} = j - H_d$$

c'est-à-dire la différence entre le champ j dû au courant vrai ($j = H_0$) et un champ H_d appelé *champ démagnétisant*. Donc :

1° *Champ.* — Dans un noyau court, le champ réellement agissant est *plus faible que le champ dû au courant vrai* (plus faible que le champ dans le noyau de la bobine très longue).

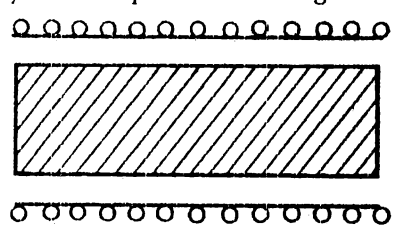


FIG. 3-28.

2° *Induction.* — Le champ réellement agissant étant plus faible, il en sera de même de l'induction B. Elle est inférieure à celle du noyau de la bobine très longue.

Ces conclusions sont valables si la bobine est aussi courte que le noyau (fig. 29). La seule différence est que le champ dû au courant vrai est inférieur à j [3-7].

REMARQUE I. — On peut d'une autre façon arriver à la notion de champ démagnétisant. Il suffit de considérer qu'en raccourcissant le noyau on a enlevé, de part et d'autre de celui-ci, deux noyaux P, Q très longs (fig. 29) et par suite annulé les inductions que ces deux noyaux produisaient dans le noyau conservé.

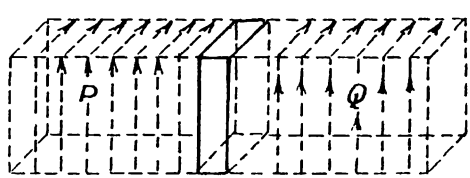


FIG. 3-29.

Dès lors *l'induction B* dans le noyau court est plus faible que dans le noyau long. Tout se passe comme si le *champ H* dans le noyau court avait été *affaibli*, c'est-à-dire *diminué* du champ démagnétisant H_d.

On conçoit ainsi que le *champ démagnétisant* H_d est *d'autant plus grand que le noyau est plus court.*

REMARQUE II. — On peut exprimer l'induction produite par une bobine courte à partir du champ $j = H_0$ dû aux courants vrais par la formule :

$$B = \mu_{app} j = \mu_{app} H_0$$

mais en faisant intervenir une *perméabilité apparente* μ_{app} *plus faible* que la perméabilité absolue $\mu = \mu_0 \mu_r$.

V. — Induction et champ dans une lame de fer très mince normale au champ

23. **Réduction du champ. Conservation de l'induction.** — Dans ce cas le vecteur H (fig. 31) est normal à la lame. Celle-ci étant très mince, le champ dû aux ampériens est équivalent à un courant $j_a\, dl$ est négli-

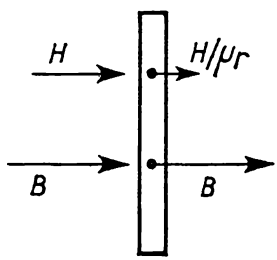


FIG. 3-30.

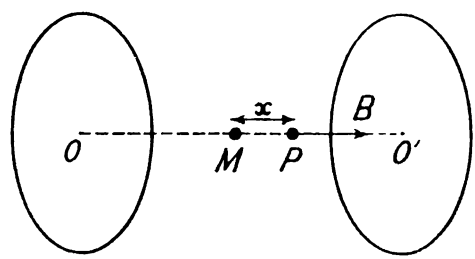


FIG. 3-31

geable, dl étant un infiniment petit et tout se passe comme si l'on avait supprimé entièrement $j_a = M$ (par rapport à la bobine à noyau très longue). On a donc dans l'épaisseur de la lame de fer (puisque $M = 0$)

$$B = \mu_0 H$$

(même induction qu'en dehors de la lame).

Par contre le champ H est *normal à la surface du fer.* Nous avons montré [3-17] que le rapport des composantes normales de H est dans le rapport inverse des perméabilités. Donc

$$H_{fer}/H_{air} = 1/\mu_r \qquad \text{et} \qquad H_{fer} = H_{air}/\mu_r$$

Le champ est fortement diminué dans le fer.

24. **Conséquence. Une pièce de fer doux s'aimante dans le sens de la longueur.** — Soit un barreau (fig. 32) soumis à l'action d'un champ H oblique par rapport à son axe. On peut décomposer celui-ci suivant la composante axiale H_a et transversale H_t.

La première engendre suivant l'axe une induction axiale qui (si le barreau est assez allongé) est peu inférieure à $\mu_0 \mu_r H_a$, la seconde une

induction transversale qui (si le barreau est mince) est peu supérieure à $H_t \times \mu_0$ [15].

C'est dire que l'*ordre de grandeur* du rapport des inductions axiales et transversales est B_a/B_t égal à :

$$\frac{H_a}{H_t} \times \mu_r.$$

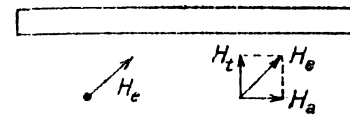


FIG. 3-32.

On voit que B_a *est beaucoup plus grand que* B_t. Ce fait est dû au champ démagnétisant beaucoup plus grand dans le sens transversal que dans le sens longitudinal.

Cela explique l'orientation des grains de limaille suivant la direction du champ magnétique au point où chacun d'eux se trouve et par conséquent la matérialisation des lignes d'induction (spectre magnétique) par les alignements de ces grains.

25. **Interprétation physique de la perméabilité relative.** — Le tracé des lignes d'induction à l'extérieur du fer montre que le flux d'induction Φ qui, dans la région centrale du barreau passe à travers sa section s, traverse une surface S beaucoup plus grande à une certaine distance de cette région centrale. Ce flux d'induction étant conservatif [1-10], on peut écrire :

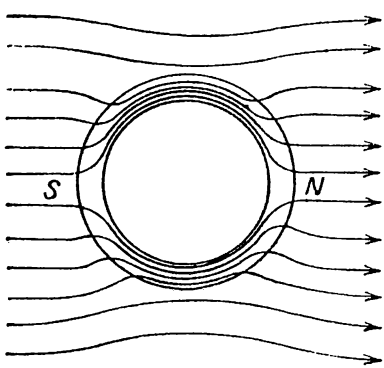


FIG. 3-33.
Réfraction des lignes d'induction.

$$\frac{S}{s} = \frac{\Phi/s}{\Phi/S} = \frac{\mu_0\mu_r}{\mu_0} = \mu_r.$$

On voit que μ_r exprime la *concentration* des lignes d'induction, l'accroissement de leur densité. On a l'impression que le barreau de fer est plus perméable que l'air au flux d'induction. On s'explique ainsi le nom de *perméabilité magnétique* donné à μ_r.

26. **Bobines de Helmholtz.** — Deux bobines plates de rayon R dont les plans sont parallèles et distants de R ont le même axe (fig. 31) et sont parcourues dans le même sens par le même courant I. En un point P de l'axe distant de x du milieu M de OO' les inductions s'ajoutent :

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2}\left(1 - \frac{1}{[R^2 + (R/2 + x)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[R^2 + (R/2 - x)^2]^{3/2}}\right)$$

Le lecteur vérifiera que les dérivées 1er, 2e et 3e de B par rapport à x s'annulent pour $x = 0$. Donc (à un infiniment petit du 4e ordre près) la valeur de B est la même en M et au voisinage de M. Ce système appelé *bobines de Helmholtz* permet d'obtenir une induction connue (1) et pratiquement constante dans une petite région de l'espace (2).

(1) Le calcul donne pour $x = 0$ la valeur $B = 2\mu_0 I/5R\sqrt{5}$.
(2) Un solénoïde donne aussi, à l'intérieur, loin de ses extrémités une induction uniforme, mais son utilisation est plus incommode.

CHAPITRE 4

AIMANTATION

MILIEUX MAGNÉTIQUES

1. **Classification des substances.** — Toutes les substances ont des propriétés magnétiques, c'est-à-dire sont le siège de courants ampériens quand elles sont placées dans un champ magnétique ; mais :

1° Pour *la plupart* d'entre elles, dites *non ferromagnétiques*, l'aimantation M est proportionnelle à B et à H, autrement dit leur *susceptibilité magnétique* χ (et par conséquent leur *perméabilité*) sont *constantes*. Mais la susceptibilité magnétique est extrêmement petite (au maximum 10^{-3}). C'est dire que les propriétés magnétiques de ces substances sont tellement faibles que, *dans la technique on les considère comme non magnétiques.*

Leur étude magnétique a été faite cependant de façon très complète, car elle a fourni des données très utiles sur la constitution des atomes.

Les substances de ce premier groupe se divisent en deux catégories :

a) Les corps *paramagnétiques* pour lesquels on a $\chi > 0$. C'est dire que, dans ces corps, les vecteurs M et H portés par le même support, proportionnels, sont *dans le même sens.*

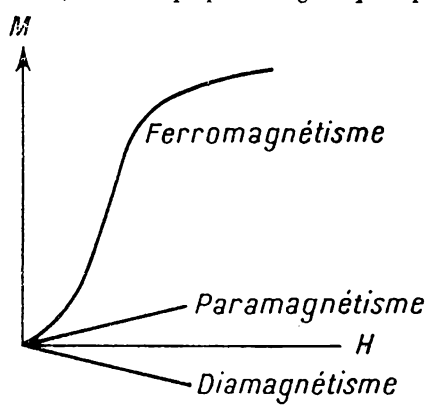


FIG. 4-1.

b) Les corps *diamagnétiques* pour lesquels on a $\chi < 0$. Les vecteurs M et H portés par le même support et proportionnels sont de *sens contraires.* C'est dans cette catégorie que se rangent *presque tous* les corps simples et composés, les substances paramagnétiques étant beaucoup plus rares.

2° Pour quelques substances dites *ferromagnétiques*, l'aimantation M n'est plus liée fonctionnellement à H (elle dépend de toutes les valeurs antérieures prises par H) ; donc χ est *variable* et, d'autre part, peut prendre des *valeurs positives très grandes* (jusqu'à 10^7). C'est dire que les substances ferromagnétiques ont des propriétés magnétiques très marquées (fig. 1). Dans la pratique on les considère comme *les seules substances magnétiques.*

On ne connaissait autrefois dans ce groupe que les métaux *fer*, *nickel*, *cobalt* et quelques minerais tels la *magnétite*.

A ces métaux on a pu ajouter récemment deux métaux de la famille des terres rares, le *gadolinium* et le *dyprosium*, mais le fait le plus important (conséquence de notre meilleure connaissance de la constitution des atomes et des conditions du magnétisme) est le suivant : *on peut réaliser des alliages ferromagnétiques avec des métaux non-ferromagnétiques.*

Nous étudierons particulièrement les plus intéressantes au point de vue technique : les substances ferromagnétiques dont le principal type est le *fer*.

2. **Explication de leurs propriétés.** — 1° *Substances diamagnétiques.* Dans *la plupart* des métaux, les moments (orbitaux et de spin) des électrons de l'atome *se compensent.* Le moment résultant de l'atome est *nul.* Mais quand on soumet ces substances à un champ quelconque, il apparaît dans l'atome — nous expliquerons plus loin [4-11] pourquoi — un moment magnétique *toujours opposé* au champ appliqué. Sa perméabilité est donc inférieure à 1 et sa susceptibilité est négative.

2° *Substances dont le moment résultant atomique n'est pas nul.* Elles se divisent en plusieurs catégories :

a) Les *substances paramagnétiques* dans lesquelles les distances entre les atomes voisins sont telles que chacun de ceux-ci se comporte comme s'il était isolé. L'orientation du moment résultant de chaque atome est indépendante de l'orientation des moments des autres atomes. Ces substances s'aimantent *dans le sens* du champ appliqué et *proportionnellement à ce champ.*

b) Les *substances ferromagnétiques* caractérisées par le phénomène remarquable que voici :

Lorsque les distances entre les atomes sont comprises entre certaines limites, des couplages électriques [7-20] importants se produisent entre les circuits électriques que constituent les orbites électroniques. C'est dire qu'un atome subit une forte action magnétique de la part de tous les autres, surtout de ses voisins.

Dès lors l'action de l'ensemble des aimants élémentaires sur l'un d'entre eux équivaut pour celui-ci à l'action d'un champ que l'on appelle *champ moléculaire* (1).

Weiss a montré que, sous l'action du champ moléculaire, tout un ensemble d'aimants élémentaires prend, quant à leurs moments, la même orientation (fig. 3). Cet ensemble s'appelle un *domaine magnétique* (2). Chaque domaine comprend plusieurs millions d'atomes.

Une substance ferromagnétique est donc caractérisée par une aimantation intense préalable, *spontanée*, mais dans différentes directions. C'est parce que ces directions sont différentes qu'avant l'application de

(1) Ce champ moléculaire est *très intense*, de l'ordre de 4×10^9 A/m.

(2) Les domaines magnétiques ont été rendus visibles en polissant une masse de fer, en la recouvrant d'un film de fluide magnétique constitué par un oxyde de fer (rouge) en suspension dans l'alcool et en appliquant un fort champ magnétique perpendiculaire à la face polie. Les lignes d'induction entrant dans le fer se concentrent sur les pôles sud des domaines. Le fluide s'accumule sur ces pôles et le dessin des domaines est visible au microscope.

tout champ extérieur, la substance n'a aucune action magnétique extérieure.

Mais l'application d'un champ extérieur suffisant peut, comme nous le montrerons plus loin, orienter dans le même sens tous les aimants élémentaires.

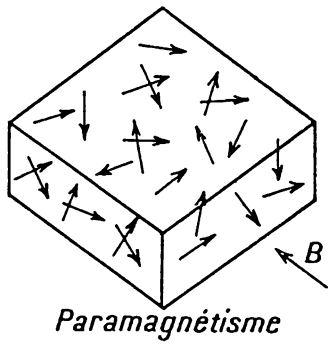


FIG. 4-2.

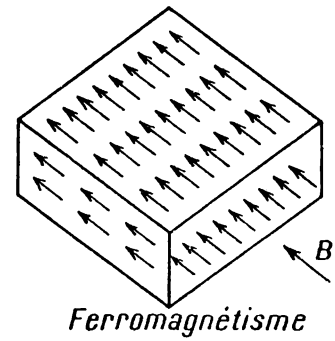


FIG. 4-3.

c) Les *substances antiferromagnétiques*. Les moments magnétiques des atomes peuvent, en l'absence de tout champ extérieur, s'orienter deux à deux en sens inverse l'un de l'autre (1). Le cristal comporte alors deux sous-réseaux magnétiques intercalés ayant chacun tous ses aimants élémentaires parallèles, mais en sens inverse l'un de l'autre (fig. 4).

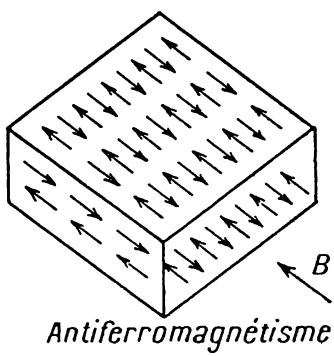


FIG. 4-4.

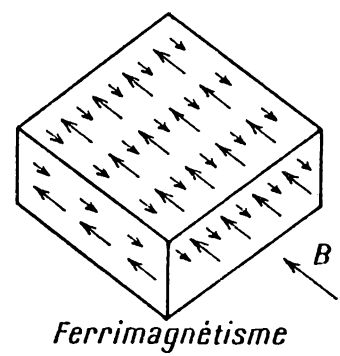


FIG. 4-5.

L'aimantation spontanée est donc nulle et l'effet d'un champ extérieur est une aimantation très faible (2). Un tel cristal est dit antiferromagnétique (fig. 4). Citons parmi ces substances : Cr, MnF_2, FeO, MnS, CoF_2.

d) Les *substances ferrimagnétiques*. Elles ne diffèrent des précédentes que par le fait suivant : les deux sous-réseaux magnétiques (bien que toujours orientés en sens inverse l'un de l'autre) ont des moments magné-

(1) Comme deux barreaux aimantés que l'on place parallèlement l'un à l'autre.
(2) Du même ordre que celle des paramagnétiques.

tiques *différents* (fig. 5). La compensation n'a plus lieu et l'on observe une aimantation spontanée comme dans le cas du ferromagnétisme.

La classe la plus importante des substances ferrimagnétiques est constituée par les *ferrites*, matériaux à structure cubique répondant à la formule générale MeF_2O_4 (Me = métal bivalent tel que Cu, Mn, Zn, Ni, Co) dont certaines propriétés sont intéressantes (en particulier la grande résistivité et l'effet semi-conducteur) et leur confèrent une grande souplesse d'emploi.

3. **Mécanisme de l'aimantation d'une substance ferromagnétique.** — Dans l'électrotechnique (courants forts à faible fréquence), seules les substances ferromagnétiques sont pratiquement intéressantes. C'est pourquoi nous nous proposons de montrer le mécanisme de leur aimantation.

Les directions d'aimantation spontanée des domaines élémentaires ne sont pas quelconques. Il existe des directions d'aimantation privilégiées (fig. 6), liées à la symétrie du réseau cristallin. Le fer présente trois directions privilégiées parallèles aux arêtes de ses cristaux qui sont cubiques.

Les domaines sont séparés par des *parois*, régions de transition dans

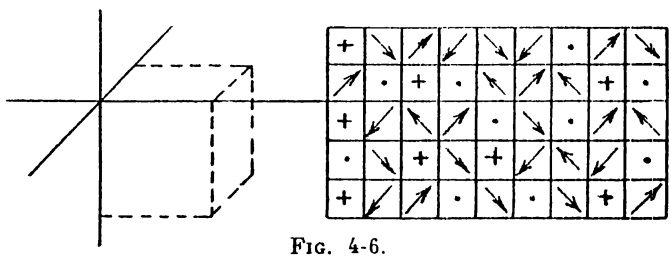


FIG. 4-6.

lesquelles les atomes tournent de la direction qu'ils occupent à celle qu'ils occuperont dans le domaine voisin (fig. 7). Quand, à une pièce de fer, on applique un faible champ magnétique H :

1° D'abord il *déplace les parois*, agrandissant les domaines où les aimants atomiques sont presque parallèles à H et alignant dans cette direction les atomes nouvellement annexés. Ces domaines s'accroissent aux dépens de ceux qui sont moins favorablement orientés. Ces derniers se contractent. Il en résulte qu'un plus grand nombre d'aimants atomiques vient s'aligner dans la même direction. La substance devient magnétique.

2° Elle provoque ensuite la *rotation* du vecteur aimantation d'un domaine de façon à l'amener dans la direction privilégiée la plus voisine de celle de H. Ces rotations sont *brusques*. A chacune d'elles correspond un accroissement de l'aimantation de la substance.

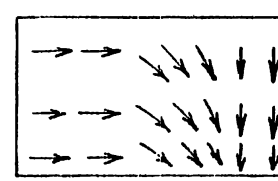


FIG. 4-7.

3° Quand, dans tous les domaines, la direction des moments magnétiques est la direction privilégiée la plus voisine de celle de H, les vecteurs moments des domaines élémentaires se rapprochent peu à peu de la direction de H.

4° Quand ils ont tous pris cette direction, *la saturation est atteinte.* L'aimantation M ne change plus et dès lors dans la formule :

$$B = \mu_0(H + M),$$

le terme M devient constant, et le quotient $M/H = \chi$ tend vers zéro. Dès lors μ_r tend vers 1.

REMARQUE I. — L'orientation des aimants élémentaires ne s'effectuant pas au stade moléculaire (ce qui exigerait des champs magnétiques énormes), mais *sur des domaines déjà fortement aimantés*, l'aimantation des ferromagnétiques n'exige que des champs relativement faibles.

REMARQUE II. — Les domaines de Weiss peuvent s'orienter mécaniquement. Des traitements mécaniques (meulage, écrouissage, etc...), des chocs répétés aimantent des pièces et des outils (limes, burins, etc...). Il en est de même de l'opération qui consiste à faire tourner très rapidement un barreau autour de son axe. C'est l'*effet Barnett.*

Ce phénomène a sa réciproque. L'aimantation produit, dans un matériau magnétique, des contraintes mécaniques et des déformations. C'est la *magnétostriction*, phénomène appliqué à certains émetteurs d'ultrasons et aux stabilisateurs de fréquence.

REMARQUE III. — Soit du fer en très fines particules. Chacune de celles-ci peut ne renfermer qu'un seul domaine. Préalablement aimantées puis comprimées, elles ne peuvent que difficilement retrouver l'une de leurs 6 directions privilégiées car le déplacement des parois des domaines n'est plus possible. C'est dire qu'il faut un champ extérieur bien plus grand pour changer leur direction. Nous verrons [5-29] leur application aux aimants permanents.

4. **Influence de la température sur les propriétés magnétiques.** — La température provoque l'agitation désordonnée des spins dont l'orientation par un champ magnétique devient de plus en plus difficile. Lorsque la température atteint une valeur suffisante, l'effet d'orientation du champ devient nul et la substance se comporte comme si elle était *amagnétique.*

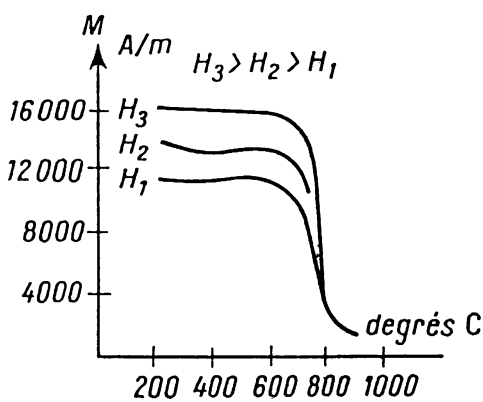


FIG. 4-8.

Cette influence de la température sur les propriétés magnétiques n'est pas simple (comme l'influence sur la résistance électrique) et ne peut être traduite que par des courbes telles que la famille de courbes de la figure 8 relative au fer. Elles donnent la variation de l'intensité d'aimantation en fonction de la température pour différentes valeurs du champ magnétique H. En général, on voit que :

1° Pour les champs faibles, l'aimantation passe par un maximum avant de décroître très rapidement ;

2° Pour les champs intenses, l'aimantation décroît d'abord lentement puis très vite. La température à laquelle l'aimantation commence à baisser assez brusquement et au-dessus de laquelle le métal perd pratiquement ses propriétés magnétiques est appelée *température critique* ou *point de Curie*. Elle est, pour le fer doux, comprise entre 500 °C et 700 °C, pour le nickel entre 250 °C et 300 °C.

Cette propriété trouve son application dans la désaimantation des aimants ; on les porte à 800 °C, puis on les laisse refroidir lentement à l'abri de tout champ magnétique.

Il existe des alliages pour lesquels le point de Curie est très inférieur à la température ordinaire ; par exemple des aciers au nickel-chrome (très durs) : ce sont des aciers *amagnétiques*.

Étude particulière du fer. Saturation. Hystérésis

Étudier l'aimantation du fer revient à déterminer la variation de $\vec{B}$ (effet) en fonction de $\vec{H}$ (cause).

5. **Application de l'aimant toroïdal à l'étude de la variation $B(H)$.** — Pour créer un champ H connu à partir d'un courant passant dans une bobine, il faut se placer dans le cas où le *champ démagnétisant* (calcul à peu près impossible) *est nul* c'est-à-dire dans le cas de l'aimant toroïdal (fig. 9).

Si n désigne le nombre de ses spires, I le courant qui les parcourt, l la longueur de la ligne d'induction moyenne, on obtient le champ $H = nI/l$ à partir de la lecture de I à l'ampèremètre.

D'autre part, une bobine de n' spires superposée à la précédente est reliée à un *fluxmètre* (appareil que nous décrirons plus loin [6-15]) et qui permet de connaître le *flux d'induction magnétique* (flux du vecteur B) qui passe à travers les n' spires, donc dans le tore de fer de section s.

En définitive l'indication de l'ampèremètre (fig. 9) permet de connaître H, le fluxmètre permet de connaître B par le rapport :

$$B = \Phi/s \qquad (s = \text{section du fer}).$$

Nous procédons à deux séries d'expériences.

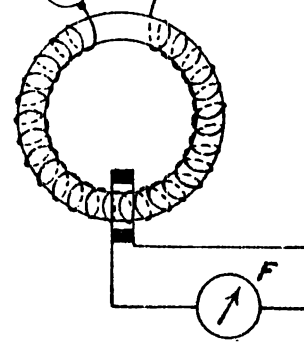


FIG. 4-9.

6. **Champ croissant. Saturation magnétique.** — Dans le tore, nous avons placé un noyau dépourvu de toute aimantation. Faisons croître le courant I *sans*

jamais revenir en arrière. Pour différentes valeurs de l'intensité croissante du courant, mesurons H et B comme nous l'avons indiqué. Traçons les graphes :

$$B(H) \qquad \text{et} \qquad \mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} \text{ (fig. 12 et 13)}$$

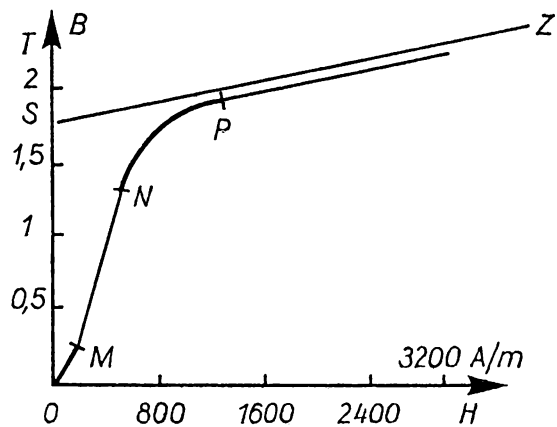


FIG. 4-10.

en fonction de H pour un acier doux. Examinons ces graphes. Nous observons que :

1° B varie en fonction de H suivant une loi complexe ;

2° La courbe $B(H)$ présente :

a) Une petite *branche parabolique OM* qui a peu d'intérêt pratique (car elle se termine pour un champ très faible, de l'ordre de 80 A/m). Cette branche correspond à l'accroissement de volume de certains domaines élémentaires [3] par déplacement des parois.

b) Une *portion sensiblement rectiligne MN*, dans laquelle B est à peu près proportionnel à H. C'est dans cette portion que se produisent les rotations brusques des moments des domaines élémentaires (1).

c) Un *coude NP* au cours duquel les moments des domaines presque orientés prennent progressivement l'orientation du champ appliqué.

d) Une *branche asymptotique à une droite SZ.* Là, les moments des domaines élémentaires sont déjà parfaitement orientés.

(1) Ce fait peut être mis en évidence (expérience de Barkhausen) en disposant, dans le montage de la figure 9, un amplificateur et un haut-parleur à la place du fluxmètre. Quand on fait croître lentement et très régulièrement le champ, on entend dans le haut-parleur des crépitements, chaque détonation correspondant à la brusque modification de l'orientation du moment magnétique d'un domaine.

L'aimantation M est constante et l'on a :

$$\Delta B = \Delta[\mu_0(H + M)] = \Delta\mu_0 H + \Delta\mu_0 M = \Delta\mu_0 H$$

($\Delta M = 0$).

La loi de croissance de l'induction est la même que dans le vide. Tout se passe comme si le fer se comportait comme l'air. On dit alors que le métal est *saturé*.

La *courbe de perméabilité* $\mu_r(H)$ se déduit de la précédente (fig. 11). Si l'on porte en ordonnée la grandeur B/μ_0 et H en abscisse, la perméabilité $\mu_r = B/\mu_0 H$ est mesurée par le coefficient angulaire de la tangente à la courbe. On y distingue comme valeurs particulières :

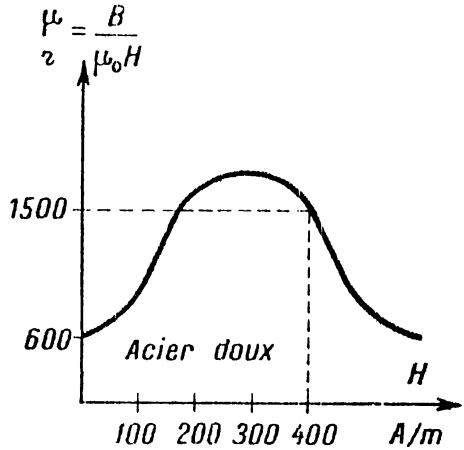


FIG. 4-11.

a) La perméabilité *initiale* $\mu_{ri} = \text{tg}\,\alpha_1$ (de l'ordre de 600) ;

b) La perméabilité *maximale* $\mu_{rm} = \text{tg}\,\alpha_2$ (de l'ordre de 2 000).

On note que, pour une induction de 1 tesla, la perméabilité relative de l'acier doux est de l'ordre de 1 500. Dans la zone de saturation la valeur de μ_r tend vers 1 (1).

7. **Champ variable. Hystérésis.** — Poursuivons les mesures déjà décrites et, lorsque nous avons atteint H_{max}, faisons décroître le champ jusqu'à la valeur $-H_{max}$ (par inversion du courant dans la bobine toroïdale), puis faisons-le croître à nouveau jusqu'à $+H_{max}$. Reportons sur un graphe (fig. 12) tous les résultats d'expériences et traçons les courbes de croissance et de décroissance de B en fonction de H.

Nous constatons que :

a) Lorsque le champ décroît, l'induction, pour une même valeur de H, a une valeur plus élevée qu'au cours de la croissance de l'excitation ; il y a donc en quelque sorte retard de l'induction sur le champ, d'où le nom d'*hystérésis* donné par Ewing à ce phénomène (2).

b) Les différentes branches de courbe tracées entre $-H_{max}$ et $+H_{max}$, puis entre $+H_{max}$ et $-H_{max}$ ne se superposent pas. Cependant, elles tendent à se superposer et coïncident tout à fait au bout de quelques opérations. Les deux branches $B(H)$ — branche supérieure et branche

(1) Dans le fer, sa valeur est d'environ 1500 pour un champ de 320 A/m ; elle vaut 1,5 seulement (soit mille fois moins environ) lorsque le champ atteint 85 000 A/m.

(2) Ce mot vient du grec « ustéreo », je retarde. Ce retard n'est pas un retard de temps, mais une sorte de résistance de l'effet à grandir quand la cause grandit, à diminuer quand la cause diminue, résistance dont la conséquence est qu'à une même valeur du facteur cause correspondent plusieurs valeurs de la fonction effet. Ce phénomène est à rapprocher de l'hystérésis élastique d'un ressort qui subit des déformations permanentes (écrouissage).

inférieure — sont alors symétriques par rapport à l'origine O; leur ensemble constitue une courbe fermée qu'on appelle *cycle d'hystérésis*.

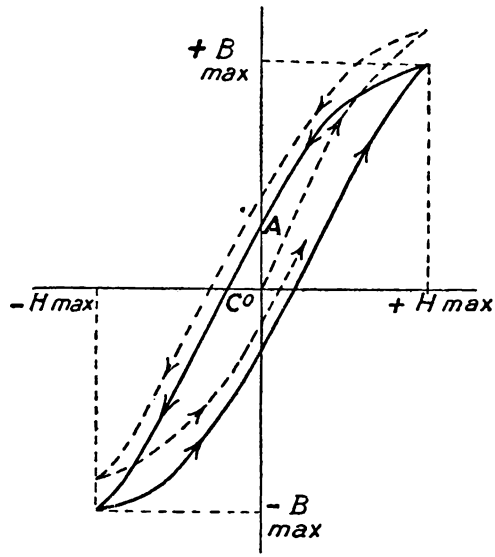


FIG. 4-12.

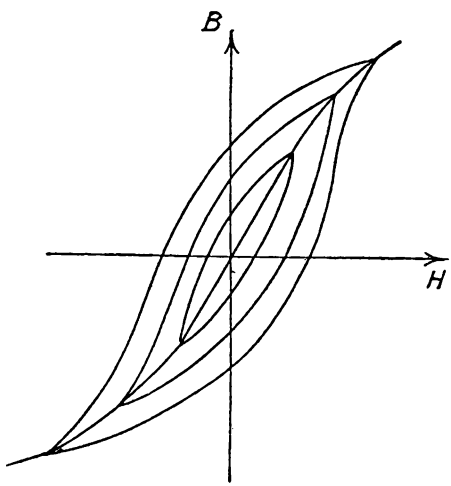


FIG. 4-13.

Ces résultats d'expériences nous conduisent à d'importantes observations :

1° Lorsque, après une augmentation du champ, celui-ci redevient nul, l'induction a une certaine valeur OA ; on l'appelle *l'induction rémanente*, et on dit que le métal a conservé un certain magnétisme rémanent.

2° Pour rendre nulle l'induction du métal, il faut le soumettre à un champ OC de sens opposé au champ primitif, et qu'on appelle *champ coercitif*.

3° Non seulement l'induction B n'est pas proportionnelle au champ H, mais encore elle n'est pas une *fonction uniforme* de H, c'est-à-dire qu'elle dépend de tous les états magnétiques antérieurs. Elle dépend même des traitements thermiques (trempe, revenu, recuit) qu'a subi le métal.

Il existe cependant une courbe $B(H)$ parfaitement définie et caractéristique d'une substance magnétique : c'est la courbe des *inductions*

limites appelée plus communément *courbe d'aimantation* (fig. 13) obtenue en joignant les sommets des cycles correspondant à diverses valeurs H_{max}. C'est cette courbe qui intervient dans le fonctionnement des machines électriques et qui est d'ailleurs donnée par des appareils appelés *perméamètres.*

REMARQUE I. — Des cycles d'hystérésis peuvent être obtenus entre deux valeurs extrêmes de H qui ne sont pas égales et de signe contraire

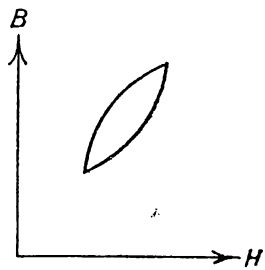


FIG. 4-14.

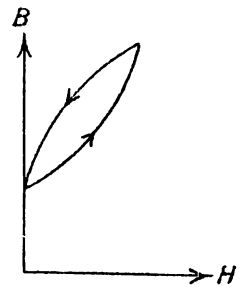


FIG. 4-15.

(fig. 14 et 15). Mais celui que nous avons décrit est le plus important parce qu'il est réalisé dans un grand nombre d'appareils industriels : transformateurs statiques, alternateurs, dynamos, etc.

REMARQUE II. — Soit un matériau dont l'état magnétique est représenté par le point Q (fig. 16). Superposons au champ constant (abscisse du point Q) un champ alternatif de très faible amplitude. Le point représentatif décrit un cycle très étroit assimilable à une droite Δ. La pente de cette droite mesure, par définition, la perméabilité *réversible* ou *incrémentielle.*

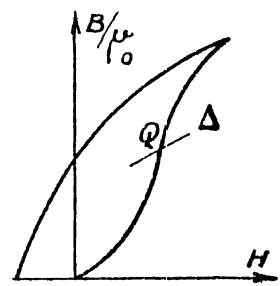


FIG. 4-16.

Alors que la perméabilité ordinaire présente un maximum au cours de sa variation avec le champ, la perméabilité réversible mesurée en différents points de la courbe de première aimantation décroît constamment.

8. **Traînage magnétique.** — Quand on soumet brusquement à une excitation un matériau ferromagnétique, on observe que l'induction B ne prend qu'avec un certain retard sa valeur définitive.

C'est le *traînage* ou la *viscosité magnétique.* L'expérience montre que ce phénomène est d'autant plus marqué que la température est plus basse et le champ magnétique plus faible. On réduit son importance par le vieillissement [1] du matériau.

9. **Explication et conséquences de l'hystérésis.** — Quand on fait décroître le champ auquel un matériau a été soumis, les phénomènes qui se produisent sont inverses de ceux que nous avons décrit à la crois-

[1] Réalisé artificiellement au moyen de cycles thermiques répétés.

sance, mais par suite de sortes de frottements (dont on n'a pas encore donné une explication satisfaisante) le changement d'orientation des domaines ne se produit que pour des champs bien inférieurs à ceux qui, en aimantation croissante, avaient déterminé leur rotation. C'est dire qu'à champ égal, l'induction est plus élevée en aimantation décroissante qu'en aimantation croissante.

On s'explique ainsi pourquoi :

a) Toute action susceptible de faciliter le mouvement des aimants moléculaires réduit l'induction rémanente ainsi que le cycle d'hystérésis. C'est le cas des chocs, des vibrations de toute nature, des champs magnétiques alternatifs de fréquence élevée : il faut les éviter dans les appareils comportant des aimants permanents.

b) A chaque cycle d'hystérésis auquel un matériau magnétique est soumis correspond une *perte d'énergie* qui se traduit par un échauffement du matériau. C'est un effet *défavorable*. Nous montrerons plus loin [7-13] que la perte d'énergie par cycle et par unité de volume du matériau est mesurée par l'*aire de ce cycle*.

10. **Hystérésis alternative. Hystérésis tournante.** — Dans les essais que nous avons décrits, le champ avait toujours, dans l'échantillon de substance magnétique, la *même direction*. Son sens était seul variable. A un tel champ alternatif correspondait une hystérésis alternative. Considérons (fig. 17) un anneau de fer tournant dans un champ radial produit par les pièces polaires d'un électroaimant. Pour un observateur entraîné avec l'anneau et regardant toujours le même point du fer, l'induction passe périodiquement par des valeurs égales et inverses. Il y a hystérésis par rotation (d'où frottements) des moments des domaines magnétiques. On l'appelle hystérésis *tournante*.

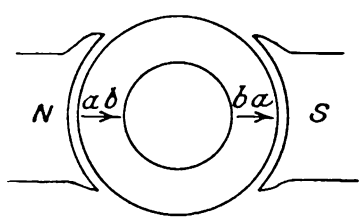


FIG. 4-17.

Ces deux hystérésis ne sont pas équivalentes. Aux inductions courantes, les pertes par hystérésis tournante sont plus grandes que les pertes par hystérésis alternative. Dans les organes tournants des machines électriques, il y a mélange d'hystérésis alternative et d'hystérésis tournante.

11. **Induction rémanente pratique.** — Considérons deux bobines de *même densité linéique j*. Toutes deux ont un noyau de fer. La première est toroïdale, la seconde est cylindrique (non indéfinie) et remplie par son noyau de fer. Si H_0 désigne le champ de la première, celle de la seconde est $H_0 - H_d$.

Vis-à-vis de la seconde H_0 n'est qu'un champ *apparent*. Dès lors :

1° Pour avoir, au centre du noyau, *la même induction* magnétique dans l'aimant cylindrique que dans l'aimant toroïdal, il faut faire passer dans la bobine du premier un *courant I plus intense* que dans la bobine du second.

2° Lorsque le courant I est nul, on a $H_0 = 0$. Le champ correspondant est H_d (opposée à H_0). Le point figuratif est en P (abscisse $-H_d$). L'ordonnée du point P est dite *induction rémanente pratique* (fig. 18).

3° Le point M du cycle est atteint non pas lorsque le courant I est nul, mais lorsqu'il est capable d'engendrer un champ égal et opposé au champ démagnétisant H_d.

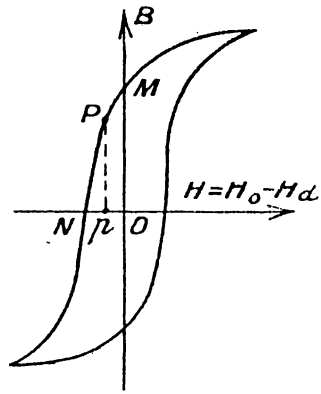


FIG. 4-18.

4° Si le champ coercitif ON est faible, l'induction rémanente pratique Pp est petite *même si le barreau est très long*, c'est parce qu'aux extrémités du barreau le champ démagnétisant est grand. Le barreau se désaimante à ses extrémités. Tout se passe comme s'il se transformait en un barreau aimanté de plus en plus court et la désaimantation gagne petit à petit le centre du barreau. Dès lors l'induction rémanente pratique varie dans le même sens que le champ coercitif : le fer doux d'un électroaimant [5-27] est désaimanté quand il est en barreau et lorsque le courant dans la bobine est nul.

CHAPITRE 5

AIMANTS

BARREAU
AIMANT PERMANENT. ÉLECTROAIMANT
MATÉRIAUX MAGNÉTIQUES

BARREAU RIGIDEMENT AIMANTÉ

Soit un barreau constitué par une substance dont le cycle d'hystérésis a la forme donnée par la figure 1 et dont le point figuratif est en M. On voit que l'action d'un champ magnétique extérieur H ne modifie pas sensiblement l'induction de ce barreau (si H n'atteint pas une grande valeur). On dit alors que le barreau est *rigidement aimanté.*

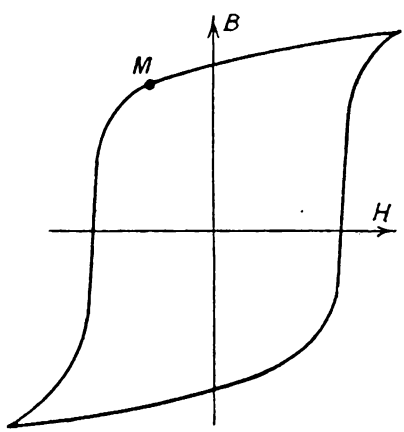


FIG. 5-1.

Un tel barreau est caractérisé par son *moment magnétique* $\mathfrak{M}$, son *axe magnétique* et son *intensité moyenne d'aimantation* M_{moy}.

1. Moment magnétique d'un barreau rigidement aimanté. — Soit un barreau parallélipipédique de côtés a, b, l placé dans un champ uniforme d'induction B. Remplaçons l'ensemble des ampériens de ce barreau aimanté par le courant I dans un solénoïde fictif de n spires enroulées sur la longueur l. Il faut pour cela l'égalité :

B_a (induction dans l'aimant) $= \mu_0 nI/l$.

Les figures 2 et 3 montrent que les forces de Laplace F qui s'exercent sur deux côtés a opposés s'annulent sauf sur les longueurs b tg α aux deux extrémités. Exprimons le couple exercé par $\vec{B}$ sur la bobine équivalente :

$$\Gamma = \underbrace{BIa}_{\substack{\text{force}\\ \text{de Laplace}}} \times \underbrace{\frac{n}{l} b \operatorname{tg} \alpha}_{\substack{\text{nombre}\\ \text{de spires}}} \times \underbrace{l \cos \alpha}_{\substack{\text{bras}\\ \text{de levier}}} = BnIab \sin \alpha$$

soit :

$$\Gamma = B \frac{nI}{l} \times l\, ab \sin \alpha$$

soit en vertu de la relation (1), en désignant par Φ_a le flux dans l'aimant :

$$\Gamma = B \cdot \frac{B_a}{\mu_0} \cdot l\, ab \sin \alpha = B \frac{\Phi_a}{ab\, \mu_0} l\, ab \sin \alpha = B \frac{\Phi_a l}{\mu_0} \sin \alpha$$

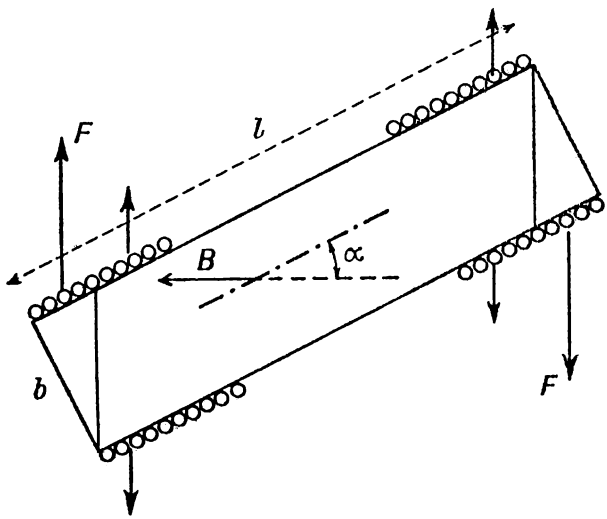


FIG. 5-2.

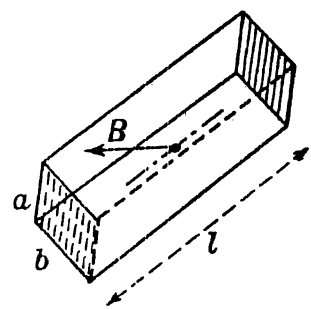


FIG. 5-3.

La comparaison de cette expression avec celle du couple exercé par un champ électrique E sur un dipôle électrique :

$\Gamma = Eql \sin \alpha = E\mathfrak{M} \sin \alpha$ ($\mathfrak{M}$ = moment électrique du dipôle)

nous conduit à poser :

$\mathfrak{M}$ = moment magnétique ampérien = $\Phi_a l/\mu_0$ (fig. 4).

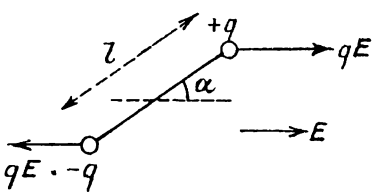


FIG. 5-4.

Le *moment magnétique ampérien* d'un barreau aimanté est donc un vecteur ayant :

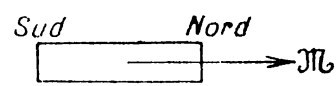


FIG. 5-5.

— pour *module*, le couple maximal auquel est soumis le barreau dans un champ d'induction B uniforme de 1 tesla ;

— pour *direction* et *sens*, ceux de la droite du barreau (fig. 5) qui tend à se coucher sur le vecteur B (axe magnétique du barreau). Le moment magnétique est, comme le moment d'un couple, un vecteur

axial. Notons que le moment magnétique d'un barreau est, en appliquant la définition de son module, une grandeur *mesurable*. Il constitue bien la grandeur *caractéristique* de cet aimant. Dans le système *SI*, il s'exprime en *mètres-newton par tesla*.

2. **Aimantation moyenne de l'aimant.** — Deux aimants de dimensions très différentes peuvent avoir le même moment magnétique. Le plus petit est donc plus aimanté que le plus grand. On est ainsi conduit à définir l'*intensité moyenne d'aimantation* d'un aimant la grandeur :

$$M_{\text{moy}} = \frac{\mathfrak{M}}{v} \quad (v = \text{volume de l'aimant})$$

C'est une grandeur de même nature (moment magnétique par unité de volume) que l'aimantation $\vec{M}$ déjà définie [3-13].

3. **Masses magnétiques ampériennes.** — La comparaison des expressions :

$$\Gamma = qlE \sin \alpha \qquad \text{(dipôle électrique)}$$

$$\Gamma = \frac{\Phi_a}{\mu_0} lB \sin \alpha$$

conduit à considérer le barreau aimanté comme portant à ses extrémités des *masses magnétiques ampériennes* Φ_a/μ_0 et à traiter le barreau aimanté dans un champ magnétique d'induction $\vec{B}$ *comme un dipôle électrique* dans un champ électrique $\vec{E}$.

4. **Formule de Coulomb applicable aux masses magnétiques ampériennes.** — La formule du potentiel électrique dû à l'ensemble de deux masses électriques $+ q$ et $- q$ distantes de dl :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\, dl \cos\theta}{r^2}$$

est déduite de la formule de Coulomb :

$$f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{r^2}.$$

Dès lors la formule du potentiel (scalaire) magnétique [1-16] :

$$\mathcal{V} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, ds \cos\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\Phi_a\, l \cos\theta}{\mu_0 r^2}$$

avec $I\, ds$ (moment magnétique du circuit électrique équivalent) $= \dfrac{\Phi_a}{\mu_0} \times l$

peut être déduite d'une formule de Coulomb (applicable aux masses magnétiques ampériennes) :

$$f = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{mm'}{r^2} \quad \text{avec} \quad m = \Phi_a/\mu_0.$$

Dès lors, l'induction B due à une masse magnétique Φ_a/μ_0 à la distance r a pour expression :

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\Phi_a/\mu_0 \times 1}{r^2} = \frac{\Phi_a}{4\pi r^2}.$$

La notion de masse magnétique ampérienne est parfois commode pour déterminer l'induction magnétique créée par un aimant ou une bobine en un point extérieur. Nous le montrerons plus loin [5].

Résumons dans un tableau comparatif les notions que nous venons d'exposer.

Grandeurs électriques	Grandeurs magnétiques (ampériennes)
E = champ électrique agissant.	B = induction magnétique agissante.
q = masse électrique.	Φ_a/μ_0 = masse magnétique ampérienne.
$\mathfrak{M} = ql$ = moment électrique.	$\mathfrak{M} = \Phi_a l/\mu_0$ = moment magnétique ampérien.
$\Gamma = ql \times E \sin\alpha = \mathfrak{M}E \sin\alpha$.	$\Gamma = \Phi_a/\mu_0 \times l \times B \sin\alpha = \mathfrak{M}B \sin\alpha$,

5. **Actions exercées par un aimant.** — Dans tout ce qui précède, nous avons considéré l'aimant comme organe *passif*, c'est-à-dire subissant l'action d'un champ. Proposons-nous de l'étudier comme élément *actif*, c'est-à-dire de déterminer l'induction $\vec{B}$ qu'il produit en un point extérieur.

Nous envisagerons plusieurs cas :

Premier cas. — *Le point considéré est placé sur l'axe de l'aimant.* On peut alors utiliser (fig. 2) l'assimilation du barreau aimanté à un solénoïde et écrire [3-7] :

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 j\,(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = \frac{1}{2}\mu_0 M\,(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

$$\simeq \tfrac{1}{2}\mu_0 M_{moy}\,(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

Deuxième cas. — *Le point considéré est fort éloigné de l'aimant.*

Il vaut mieux, dans ce cas, raisonner strictement suivant la méthode ampérienne et *passer par le potentiel magnétique.*

Nous considérons l'aimant comme formé par un ensemble d'ampériens dont les plans sont sensiblement orientés normalement à l'axe magnétique de l'aimant.

Désignons par $d\Omega$ l'angle solide sous lequel d'un point P on voit un ampérien (fig. 6) de surface dS parcouru par le courant I. Nous avons montré [1-14] que le potentiel magnétique $d\mathcal{V}$ dû à cet ampérien au point P à la distance r, est :

$$d\mathcal{V} = \frac{I}{4\pi} d\Omega = \frac{I}{4\pi} \frac{dS \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{d\mathfrak{M} \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi} d\vec{\mathfrak{M}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} ;$$

θ = angle formé avec la direction de P par la normale N à l'ampérien ; $d\mathfrak{M}$ = moment magnétique de l'ampérien.

Plaçons-nous dans le cas d'un point P assez éloigné de l'aimant pour que les distances r de tous les ampériens au point P puissent être considérées comme égales. Nous pouvons écrire :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{4\pi} \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} \cdot \vec{\mathfrak{M}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathfrak{M} \cos\theta}{r^2},$$

Nous obtiendrons, comme dans le cas du dipôle électrique, les composantes radiale H_r et tangentielle H_t à partir de cette expression du potentiel magnétique :

$$H_r = \frac{1}{4\pi} \frac{2\mathfrak{M} \cos\theta}{r^3} \quad \text{et} \quad H_t = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathfrak{M} \sin\theta}{r^3}$$

qui conduisent aux remarques suivantes :

a) Les grandeurs B et H dues à un aimant varient en raison *inverse du cube de la distance.*

b) A distance égale, l'induction axiale est *double de l'induction équatoriale* (dans un plan normal au barreau aimanté en son milieu. Les deux positions correspondantes sont dites *positions de Gauss.*

Troisième cas. — *L'aimant est très long. Le point considéré est quelconque.* On considère l'aimant (ou le solenoïde équivalent) comme portant à ses extrémités des masses magnétiques ampériennes :

$$\Phi a, / \mu_0 = \frac{BaS}{\mu_0} = HaS = \frac{NI}{l} \times S$$

Φa = flux axial ; Ba = induction axiale ; S = section ; NI/l = ampères par mètre.

AIMANT PERMANENT

L'aimant permanent a des applications très importantes et très étendues.

6. **But à atteindre.** — Le but à atteindre pour tout fabricant d'aimant permanent est le suivant :

Obtenir dans un entrefer (volume v) *donné, une induction magnétique B donnée avec le minimum de matériau magnétique :*

Quand il s'agit d'aimantation permanente, la partie utile de la courbe $B(H)$ est uniquement celle qui est comprise entre les axes de coordonnées *après une aimantation à saturation* (fig. 9), car le point figuratif de l'état de l'aimant est le point P dont l'abscisse est le champ démagnétisant H_d [3-22]. Cette portion utile est appelé *courbe de démagnétisation*

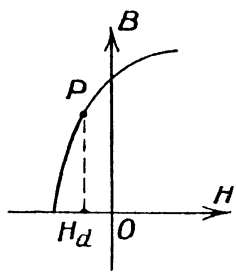


FIG. 5-9.

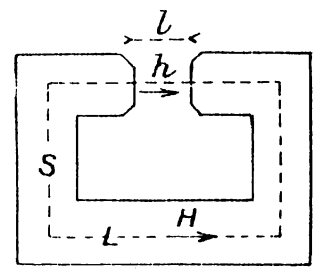


FIG. 5-10.

7. **Minimum de matériau magnétique.** — PROPOSITION I. — *Le volume de matériau magnétique est minimal quand le produit BH est maximal.*

Soit (fig. 10) L, S la longueur et la section de l'aimant, l, s la longueur et la section de l'entrefer. Désignons par H le champ (démagnétisant) dans le fer et h le champ dans l'entrefer (1).

La circulation du vecteur champ le long d'un circuit fermé est nulle, puisqu'elle se produit sans traverser des courants vrais :

$$HL - hl = 0 \qquad \text{ou} \qquad HL = hl. \tag{1}$$

Le flux d'induction est conservatif, donc :

$$BS = \mu_0 hs \qquad (B = \text{induction dans le fer}). \tag{2}$$

Multiplions membre à membre les équations (1) et (2) :

$$BHLS = \mu_0 h^2 ls \qquad \text{ou} \qquad BHV = \mu_0 h^2 v$$

(V = volume du fer ; v = volume de l'entrefer).

(1) h dans l'entrefer est b/μ_0 (b = induction dans l'entrefer). Celle-ci a le sens même dans lequel s'est exercée le champ magnétisant (sens de l'ordonnée du point P, tandis que H_d a le sens opposé au champ magnétisant).

D'où :

$$V = \frac{\mu_0 h^2 v}{BH}.$$

Le volume de métal est donc minimal lorsque le produit BH appelé *produit d'énergie* est maximal. Si l'on désigne par B' et H' les valeurs correspondant au maximum de ce produit, le produit $B'H'$ est une énergie volumique dont la grandeur exprime le *critère d'Evershed.*

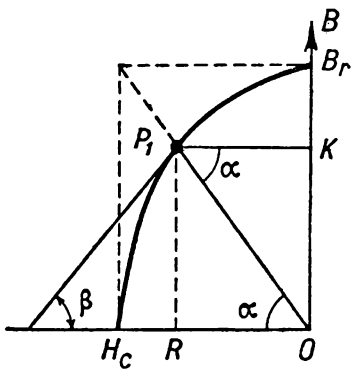


FIG. 5-11.

Noter que, pour un volume d'entrefer déterminé, V croît comme le carré de h. C'est dire que l'*encombrement* et le *prix* d'un aimant permanent *croissent rapidement* avec l'*induction magnétique* que l'on veut obtenir dans l'entrefer.

8. **Maximum du produit BH.** — PROPOSITION II. — *Le maximum du produit BH a lieu en un point P_1 tel que l'on ait $\alpha = \beta$* (fig. 11).

Soit β l'angle formé avec l'axe des abscisses par la tangente en P_1. Le maximum de BH a lieu pour :

$$\mathrm{d}(BH) = 0 \qquad \text{ou} \qquad B\,\mathrm{d}H + H\,\mathrm{d}B = 0$$

soit :

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}H} = -\frac{B}{H} = -\frac{OK}{KP_1} = \frac{OK}{-OR} = -\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi - \alpha)$$

ou :

$$\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\alpha \qquad \text{soit} \qquad \alpha = \beta\ (^1).$$

9. **Influence de la forme du circuit.** — PROPOSITION III. — *L'angle α ne dépend que de la forme du circuit.* — Supposons, pour simplifier, que l'aimant est de section uniforme et que l'induction B soit la même dans le fer et dans l'entrefer. On a alors :

$$HL = hl \quad \text{d'où} \quad HL = \frac{B}{\mu_0} l$$

d'où :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{H} = \mu_0 \frac{L}{l}.$$

La proposition est démontrée. On peut, aussi bien, dire que le champ démagnétisant $H = hl/L$ est faible quand l'entrefer est très réduit (l/L faible).

(1) On démontre que ce point P_1 se trouve sensiblement à la rencontre de la courbe de désaimantation et de la diagonale du rectangle construit sur B_r et H_c (fig. 11).

20. **Matériau optimal et forme optimale.** — Pour que le but (forte induction dans l'entrefer) soit atteint, il faut donc que :

1° tg α soit grand. Circuit long, entrefer étroit. Cela explique la forme en fer à cheval des anciens aimants.

2° Portion de cycle aussi rectangulaire que possible (fig. 12) et grand champ coercitif H_c. Cela permet d'avoir une induction élevée en accep-

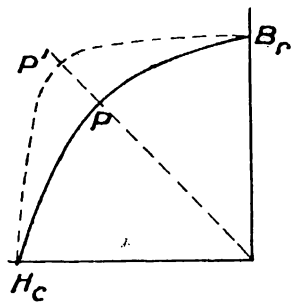


FIG. 5-12.

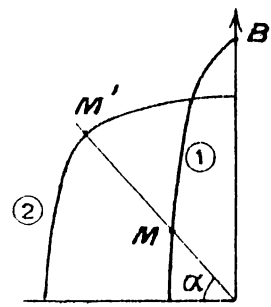


FIG. 5-13.

tant un grand champ démagnétisant (c'est-à-dire en profitant d'un large entrefer).

Enfin pour obtenir cette induction B avec le minimum de métal, il faut en outre que :

3° Le point de fonctionnement sur la courbe de désaimantation soit en P_1 de coordonnées B' et H'.

Les anciens aimants avaient leur courbe analogue à (1) (fig. 13). Il

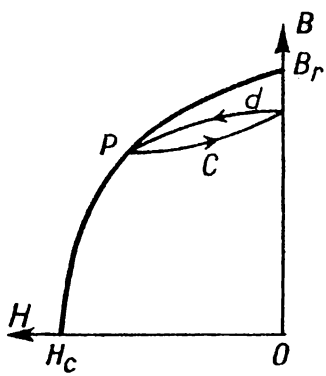


FIG. 5-14.

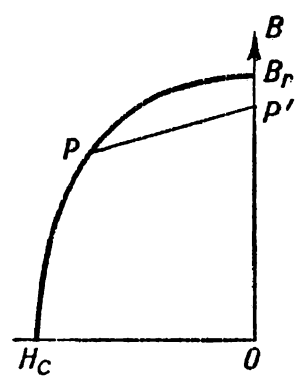


FIG. 5-15.

fallait que l'angle α fût grand. C'est pourquoi on recommandait de fermer le circuit magnétique, par une pièce de fer doux, lorsque l'aimant ne servait pas.

Les aimants actuels sont doués d'un fort champ coercitif ; ils ont leur courbe utile rectangulaire. C'est pourquoi ils peuvent avoir tg α faible, c'est-à-dire des champs démagnétisants élevés.

Pour réaliser l'angle α correspondant au minimum de métal magnétique, il faut donner au rapport L/l la valeur convenable, c'est-à-dire

prévoir pour l'aimant la forme optimale. C'est pourquoi l'usager a intérêt à *bien préciser au fabricant d'aimant l'usage auquel il destine celui-ci.*

11. **Droite de recul et meilleur mode de réalisation d'un aimant permanent.** — Court-circuitons par du fer doux le circuit magnétique d'un aimant dont le point figuratif est en P (fig. 14). Le champ démagnétisant devient nul et le point figuratif se transporte en P' en suivant la courbe PcP'. Décourt-circuitons à nouveau le circuit magnétique de l'aimant : le point P' revient en P suivant la courbe $P'dP$.

L'expérience montre que le cycle d'hystérésis $PcP'dP$ ainsi décrit par le point figuratif est *très plat* et assimilable à une droite (fig. 15) que l'on appelle *droite de recul.* La pente de celle-ci constitue la *perméabilité réversible* μ_{rev} du matériau correspondant au point P [1].

Supposons que pour réaliser l'aimant de la figure 17, on ait procédé successivement aux opérations suivantes :

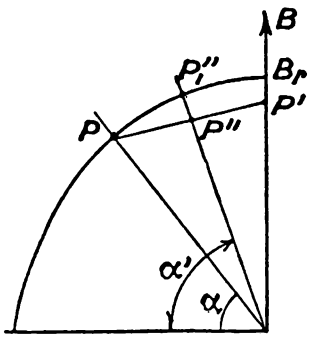


FIG. 5-16.

a) Aimantation du barreau d'acier à aimant (1). Point figuratif en P (fig. 16).

b) Fermeture du circuit magnétique (2). Point figuratif en P'.

c) Pose des pièces polaires (3). Le point figuratif suit la droite $P'P$ mais, le rapport L/l étant plus grand que, dans la situation (1), l'angle α (proposition II) a la valeur $\alpha' > \alpha$. Le point figuratif se fixe donc en P''.

Si au contraire, on avait aimanté l'acier à aimant seulement *après* la constitution définitive de l'aimant (après la pose des pièces polaires), le point figuratif se serait placé sur la courbe en P_1'' et l'induction (par conséquent : l'aimantation) aurait été plus grande. Donc :

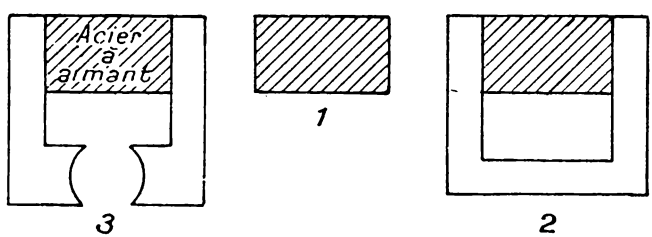


FIG. 5-17.

Un aimant ne doit être aimanté qu'au dernier moment, après la mise en place des pièces polaires.

12. **Principe du calcul d'un aimant permanent.** — On adopte pour B et H les valeurs optimales B' et H'. On écrit l'équation :

$$H'L = hl. \qquad (1')$$

[1] μ_{rev} varie environ de 30% dans la zone où l'on utilise normalement les aimants permanents.

On rectifie ensuite l'équation (2) pour tenir compte du flux de fuite magnétique (flux qui ne passe pas dans la zone utile de l'entrefer) :

$$B'S = \sigma hs \text{ avec } \sigma = \frac{\text{flux d'induction total}}{\text{flux dans la zone utile de l'entrefer}} \text{ (fig. 18); (2')}$$

B', H', h, l, s sont des données. On figure l'aimant sur une épure (car sa forme est généralement connue). On estime σ. L'équation (2') donne S. L'équation (1') donne L. On peut alors calculer σ. Si le résultat est la valeur préalablement estimée, on adopte définitivement L, S; sinon on recommence tout le calcul avec une autre valeur de σ. Au troisième calcul (parfois au deuxième), le résultat est atteint [1].

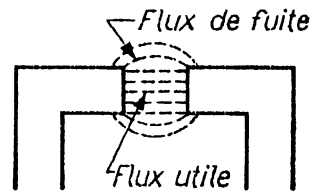


FIG. 5-18.

ÉLECTROAIMANT

I. — Théorie du circuit magnétique

13. **Définitions.** — Dans un solénoïde parcouru par un courant (fig. 19), nous avons placé un noyau de fer doux. Figurons un tube d'induction formé par l'ensemble des lignes d'induction qui s'appuient sur un contour fermé. Nous savons [3-18] que dans ce tube le flux d'induction est conservatif.

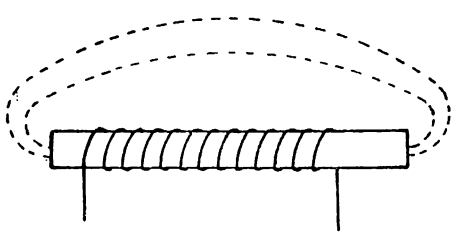


FIG. 5-19.

Nous appellerons *circuit magnétique* de l'aimant le tube d'induction dont la section est celle du barreau lui-même, c'est-à-dire renferme sensiblement toutes les lignes d'induction de l'aimant.

Ce circuit magnétique apparaît plus nettement lorsque le fer a la forme d'un anneau (fig. 20), car la plupart des lignes d'induction se ferment sur elles-mêmes sans sortir de l'anneau ; elles traversent parfois un intervalle d'air appelé *entrefer*.

Sous cette forme, une analogie géométrique apparaît entre les lignes d'induction du circuit magnétique et les lignes de courant d'un circuit électrique. C'est cette analogie que nous allons préciser par la théorie du circuit magnétique.

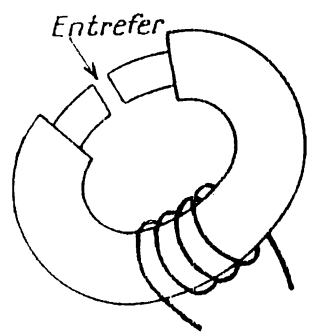


FIG. 5-20.

[1] Les courbes données par les fabricants d'aciers à aimants sonts toujours approximatives. C'est pourquoi les calculs doivent être faits par excès.

14. Le théorème d'Ampère et la conservation du flux conduisent à la loi d'Hopkinson. — Appliquons le théorème d'Ampère [1-17] à un tube d'induction de section s assez petite pour qu'on puisse considérer l'induction B comme identique en tous les points d'une même section. Si n désigne le nombre de spires du solénoïde parcourues par le courant I :

$$\mathcal{C}_H = nI = \int H\,dl = \int \frac{B}{\mu}\,dl = \int \frac{\Phi}{\mu s}\,dl = \Phi \int \frac{dl}{\mu s} \quad \text{avec} \quad \mu = \mu_0\mu_r.$$

H désignant le champ dans une portion dl du tube, μ la perméabilité absolue de cette portion élémentaire, Φ le flux d'*induction* qui est le même dans tout le tube et que, pour cette raison, nous faisons sortir du signe $\int$.

Nous aurons donc :

$$\Phi = \frac{n\,I}{\int \frac{dl}{\mu s}}.$$

Comparons cette relation avec la formule d'Ohm applicable aux circuits électriques :

$$I = \frac{e}{\Sigma R}.$$

Une analogie apparaît :

1° Le terme nI renferme les deux facteurs n et I qui sont la cause de la production du flux et joue dans le circuit magnétique le même rôle que la F. É. M. e dans le circuit électrique. On l'appelle *force magnétomotrice* et on la représente par la lettre F.

2° Le dénominateur $\int \frac{dl}{\mu s}$ est analogue à l'expression de la résistance électrique $R = \int \frac{dl}{\gamma s}$ de plusieurs conducteurs en série (γ = conductivité de chaque portion). C'est pourquoi on l'appelle résistance magnétique ou mieux *réluctance* du circuit magnétique ; on la représente par la lettre $\mathcal{R}$.

3° Le flux Φ joue le rôle de l'intensité du courant électrique.

Nous écrirons donc :

$$\text{Flux à travers un tube} = \frac{\text{Force magnétomotrice appliquée}}{\text{Réluctance du tube}}$$

et aussi bien pour tout le circuit magnétique (qui est aussi un tube)

$$\Phi = \frac{F}{\mathcal{R}} \quad \text{ou} \quad \boxed{F = \mathcal{R}\Phi}$$

cette formule, symétrique de la formule d'Ohm $I = \frac{e}{R}$ traduit la *loi d'Hopkinson.*

Soulignons les expressions :

a) De la force magnétomotrice (F. M. M.) :

$$\boxed{F = nI}$$

b) De la réluctance :

$$\mathcal{R} = l/\mu s = \boxed{l/\mu_0\mu_r s}$$

que l'on peut écrire, en posant :

$$\rho_m = \frac{1}{\mu} = \textit{résistivité magnétique},$$

$$\boxed{\mathcal{R} = \rho_m l/s}$$

expression analogue à celle de la résistance électrique.

15. **Unité *SI* de force magnétomotrice. Ampère.** — En vertu de la formule $F = nI$, cette unité se définit : la F. M. M. créée par une spire parcourue par un courant de 1 ampère.

On l'appelait *ampère-tour*, mais il vaut mieux l'appeler l'*ampère* (1). C'est parce que la F. M. M. est une grandeur de même nature qu'une D. D. P. magnétique.

En effet, si nous considérons une portion Δl d'un tube de flux (fig. 21), nous avons (notations habituelles) :

$$F = \mathcal{R}\Phi = \frac{\Delta l}{\mu s} \times \Phi = \Delta l \times \frac{\Phi}{\mu s} = \Delta l \times \frac{B}{\mu} = \Delta l \times H.$$

Or, le champ est un gradient de potentiel et si $\mathfrak{U}$ désigne la D. D. P. magnétique entre les extrémités de la portion du tube :

$$H = -\frac{\mathfrak{U}}{\Delta l}$$

d'où :

$$\mathfrak{U} = -H\Delta l = -F.$$

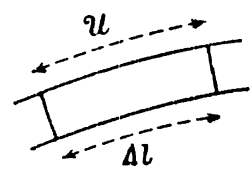


FIG. 5-21.

La force magnétomotrice F nécessaire pour faire passer le flux Φ dans le tube Δl n'est autre, au signe près, que la D. D. P. magnétique existant entre les deux extrémités du tube.

16. **Unité *SI* de réluctance. Henry inverse.** — En vertu de la formule $\mathcal{R} = F/\Phi$, l'unité *SI* de réluctance est celle d'un circuit magnétique dans lequel une F. M. M. de 1 ampère fait passer un flux de 1 weber.

(1) Ancienne unité (*EMCGS*), le *gilbert* : 1 ampère = 1,25 gilbert.

Pour des raisons que nous donnerons plus loin [7-6], cette unité s'appelle le *henry inverse* (1) (symbole 1/H).

Nous pouvons maintenant écrire les formules essentielles du circuit magnétique en indiquant les unités correspondantes :

$$\underset{\text{A}}{F} = \underset{\text{A}}{nI} = \underset{\text{1/H Wb}}{\mathcal{R}\,\Phi} \qquad \underset{\text{1/H}}{\mathcal{R}} = \frac{\overset{\text{m}}{l}}{\mu_0 \mu_r \overset{\text{m}^2}{S}}$$

17. **Problème fondamental du circuit magnétique.** — Étant donné un circuit magnétique comportant plusieurs tronçons de différentes substances, le problème du circuit magnétique peut se poser de deux façons différentes :

a) *Une force magnétomotrice* étant appliquée à un circuit magnétique déterminé, *trouver le flux* engendré dans le circuit.

b) *Un flux donné* devant être engendré dans un circuit magnétique déterminé, trouver *la force magnétomotrice nécessaire.*

18. **Sous sa première forme, le problème du circuit magnétique ne peut généralement pas être résolu de façon directe.** — Soit un circuit magnétique (fig. 22) formé de plusieurs tronçons de nature différente et dans lequel nous engendrons, au moyen de quelques spires traversées par un courant, une certaine force magnétomotrice connue.

Nous connaissons les longueurs l_1, l_2, l_3, et les sections s_1, s_2, s_3 des différents tronçons.

a) Supposons d'abord que le flux cherché Φ soit le même dans tous les tronçons. Appliquons la formule d'Hopkinson :

$$F = \Phi \Sigma \mathcal{R} = \Phi \left(\frac{l_1}{\mu_1 s_1} + \frac{l_2}{\mu_2 s_2} + \frac{l_3}{\mu_3 s_3} \right) = \frac{B_1 l_1}{\mu_1} + \frac{B_2 l_2}{\mu_2} + \frac{B_3 l_3}{\mu_3}.$$

Or, les perméabilités absolues μ_1, μ_2, μ_3 des différents tronçons *dépendent des inductions* B_1, B_2 B_3 *correspondantes* et nous ne pouvons pas déterminer ces inductions $\left(\text{par les rapports } \frac{\Phi}{s_1}, \frac{\Phi}{s_2}, \frac{\Phi}{s_3}\right)$, puisque nous ne connaissons pas le flux qui est à déterminer.

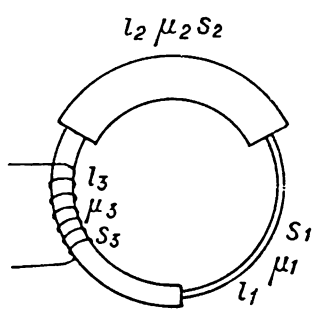


FIG. 5-22.

Nous voyons ici la difficulté que crée, dans les circuits magnétiques, le fait que μ n'est pas constant, mais fonction de B ou de H.

b) Bien plus, dans le cas général, Φ n'est pas le même dans toutes les portions du circuit magnétique. En effet, lorsque la bobine magnétisante ne recouvre qu'une partie du circuit magnétique (fig. 23), une portion du flux se dérive dans l'air, de telle sorte que le flux Φ_1 qui traverse une section prise à l'intérieur

(1) 1 henry inverse (1/H) = 10^{-9} unités *EMCGS.*

de la bobine est supérieure au flux Φ_2 traversant une section prise à l'extérieur de la bobine.

La différence : $\Phi_1 - \Phi_2 = f$ constitue le *flux de fuite* et le rapport $\rho = \frac{\Phi_1}{\Phi_2}$ toujours supérieur à 1, est appelé *coefficient de fuites magnétiques ou coefficient d'Hopkinson.*

Ce coefficient d'Hopkinson n'est connu — dans le cas général — que de façon fort imprécise. Il en résulte qu'on ne peut jamais résoudre un problème relatif aux circuits magnétiques avec la même précision qu'un problème relatif aux circuits électriques.

REMARQUE I. — Nous constatons ici une différence importante entre les circuits magnétiques et électriques. Alors que les pertes par courants directs entre les bornes d'un générateur électrique sont négligeables, les pertes de flux entre les extrémités des bobines magnétiques ne le sont pas, et ne peuvent pas l'être, car il n'existe aucune substance qui puisse procurer un isolement magnétique absolu.

REMARQUE II. — Désignons par $\mathcal{R}_2$ la réluctance de la portion fer dans lequel le flux Φ_2 joue un rôle utile et $\mathcal{R}_f$ la réluctance de la dérivation dans laquelle circule le flux de fuites f. La loi des circuits dérivés s'appliquant aux flux Φ_2 et f, on a (fig. 23) :

$$\mathcal{R}_2\Phi_2 = \mathcal{R}_f \times f.$$

D'où :

$$\frac{\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_f} = \frac{f}{\Phi_2} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\Phi_2} = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} - 1 = \rho - 1.$$

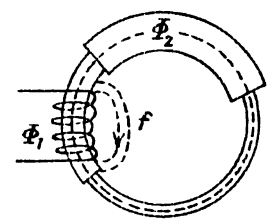


FIG. 5-23.

Φ_1 = flux dans la portion de fer à l'intérieur de la bobine.
Φ_2 = flux utile.

Donc :

a) Lorsque le circuit magnétique n'est *pas saturé*, c'est-à-dire lorsque la réluctance $\mathcal{R}_2$ du fer demeure constante comme celle de l'air $\mathcal{R}_f$, le coefficient d'Hopkinson est *constant.*

b) Lorsque le fer *se sature*, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{R}_2$ croît, le coefficient d'Hopkinson *croît.*

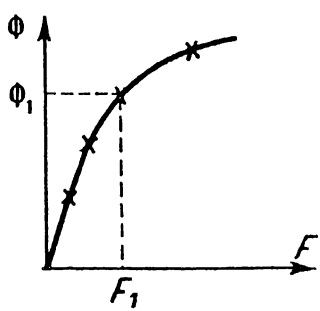


FIG. 5-24.

REMARQUE III. — Il n'y a qu'un cas où le flux de fuite est nul : c'est celui du tore électromagnétique, c'est-à-dire d'un circuit magnétique en forme de tore recouvert entièrement par la bobine magnétisante ; on dit alors que le circuit magnétique est *parfait.*

16. **Comment, sous sa première forme, le problème du circuit magnétique peut être résolu.** — On applique la méthode dite de la *courbe d'erreur.* Elle consiste à traiter plusieurs fois le problème dans le sens où l'on sait le résoudre. Ici l'on se fixe plusieurs valeurs du flux utile Φ ; pour chacune d'elles on calcule, dans chaque por-

tion, les valeurs des inductions B et on en déduit [XV-6] les perméabilités correspondantes. On n'a plus qu'à appliquer l'équation d'Hopkinson pour en déduire la force magnétomotrice correspondante.

On obtient ainsi (fig. 24) plusieurs points de la courbe $\Phi(F)$ dite *courbe de magnétisation* qui se rapporte au circuit magnétique considéré. A la valeur F_1 imposée de la F. M. M., cette courbe fait correspondre le flux Φ_1 qui répond à la question.

20. **L'aimant permanent ; cas particulier de l'électroaimant.** — Un aimant permanent est un *générateur permanent de F. M. M.* Il a une force magnétomotrice rémanente et une réluctance intérieure (tout comme une pile chimique a une force électromotrice et une résistance intérieure).

Mais alors que la F. É. M. d'une pile est bien définie ainsi que, dans un cas déterminé, la résistance totale (intérieure plus extérieure) du circuit dans lequel elle débite, la F. M. M. et la réluctance intérieure d'un aimant dépendent de façon complexe [5-11] :

— de la réluctance du circuit magnétique extérieur à l'aimant ;

— de la façon dont cette réluctance a été établie.

En effet l'*accroissement de réluctance* du circuit extérieur apparaît au technicien de l'aimant permanent comme un accroissement du champ démagnétisant, c'est-à-dire comme une *diminution* de la *F. M. M.* de l'aimant permanent (à réluctance intérieure constante).

21. **Les lois de Kirchhoff s'appliquent aux circuits magnétiques.** — Aux fuites magnétiques près, un flux d'induction se conserve dans un circuit magnétique comme un courant dans un circuit électrique. D'autre part, la loi d'Hopkinson, comme la loi d'Ohm, s'applique aussi bien aux portions de circuits qu'aux circuits fermés. On peut donc concevoir — et l'expérience confirme parfaitement — que les lois de Kirchhoff s'appliquent aux circuits magnétiques. Dès lors :

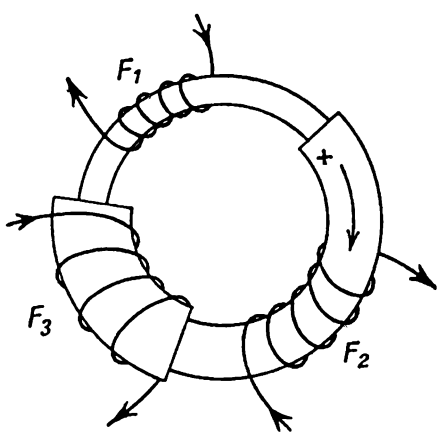


FIG. 5-25.

1° *En série, les F. M. M. s'ajoutent algébriquement.* — En effet, si on donne le signe (+) aux F. M. M. qui tendent à créer un flux dans le sens choisi comme positif, le signe (—) aux F. M. M. qui tendent à créer un flux en sens contraire (fig. 25), la F. M. M. résultante, créatrice du flux, s'écrira :

$$F_r = \Sigma F = F_2 + F_3 - F_1$$

comme dans un circuit électrique, la F. É. M. résultante produisant le courant est :

$$E = \Sigma e$$

(en général les F. M. M. s'ajoutent).

2° *En parallèle, les flux s'ajoutent.* — On peut traiter un problème de dérivations de flux comme un problème de courants dérivés.

Les figures 26 à 29 donnent deux exemples de dérivations de flux rencontrées fréquemment dans les machines. Nous avons représenté à côté les schémas des circuits électriques correspondants. Dans la figure 27, les F. M. M. créées par les deux bobines agissent dans le même sens ; dans la figure 29, elles sont opposées l'une à l'autre.

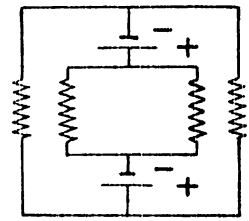


FIG. 5-26.

Ce dernier cas mérite une attention toute particulière, car il se présente dans les machines toutes les fois que deux enroulements créent, dans un circuit magnétique, des F. M. M. opposées : la D.D.P. magnétique élevée, qui en résulte, entre deux régions de ce circuit, cause d'importantes fuites magnétiques dans l'intervalle d'air qui les sépare.

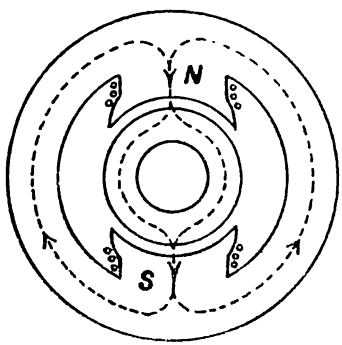


FIG. 5-27.
Correspond à la figure 26.

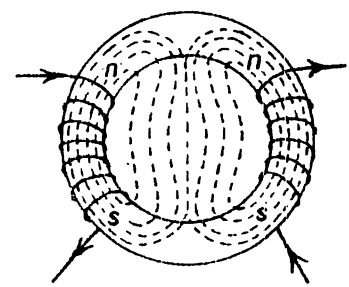


FIG. 5-29.

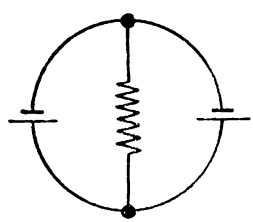


FIG. 5-28.
Correspond à la figure 29.

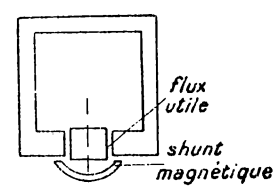


FIG. 5-30.

Signalons enfin que les ramifications de circuits magnétiques ont leur application dans les *shunts magnétiques* (fig. 30) qui dérivent une portion variable (suivant leur réluctance) du flux dans un entrefer : d'où la possibilité de réglage de ce dernier flux (application aux compteurs électriques).

22. **Écran magnétique.** — Soit un tube cylindrique épais en substance ferromagnétique que nous plaçons dans un champ d'induction uniforme parallèle à un plan normal à l'axe du cylindre (fig. 31).

On peut considérer le flux traversant le cylindre comme passant dans deux dérivations : l'épaisseur ferromagnétique et l'air. La deuxième dérivation ayant une réluctance beaucoup plus grande que la première, le flux d'induction dans l'air à l'intérieur du tube est très faible (et d'autant plus faible que le métal sera doué d'une plus grande perméabilité).

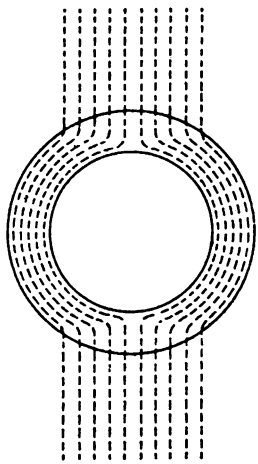


FIG. 5-31.

Dès lors B et H sont faibles à l'intérieur du cylindre. Nous conclurons :

Une enveloppe de haute perméabilité constitue un écran magnétique.

23. **Comparaison des circuits magnétique et électrique.** — Les phénomènes du magnétisme sont *statiques* ; ceux qui se rapportent au courant électrique sont *cinétiques*. Il ne peut donc y avoir, entre les circuits magnétique et électrique que des analogies *de pure forme*. Mais ces analogies ont fourni, comme nous l'avons montré, une remarquable base de calcul pour les circuits magnétiques.

Nous réunissons dans le tableau ci-après les analogies et les différences entre les circuits magnétique et électrique.

CIRCUIT ÉLECTRIQUE		CIRCUIT MAGNÉTIQUE	
ANALOGIES			
Intensité du courant	I	Flux d'induction	Φ
Densité de courant	J	Induction magnétique	B
Force électromotrice	E	Force magnétomotrice	F
Résistance	R	Réluctance	$\mathcal{R}$
Conductivité	γ	Perméabilité	μ
Conductance	$\frac{1}{R}$	Perméance	$\frac{1}{\mathcal{R}}$
Résistivité	$\rho = \frac{1}{\gamma}$	Réluctivité ou résistivité magnétique	$\frac{1}{\mu}$
Lois d'Ohm et de Kirchhoff.		Lois d'Hopkinson et de Kirchhoff.	
DIFFÉRENCES			
1° La conductivité est indépendante de l'intensité du courant I.		1° La perméabilité μ dépend de B, donc du flux.	
2° Un circuit électrique est interrompu par des coupures.		2° Un circuit magnétique peut comporter des entrefers.	
3° Un courant électrique se propage entièrement dans les conducteurs.		3° Un flux magnétique peut présenter des dérivations dans l'air.	
4° Le passage d'un courant crée une perte d'énergie et dégage de la chaleur.		4° Le passage d'un flux dans un circuit magnétique n'échauffe pas celui-ci.	
5° On peut écrire une relation $Q = It$ entre l'intensité et le temps.		5° Il n'existe pas de relation équivalente entre le flux et le temps.	

Une analogie à souligner en vue des applications est celle qui existe entre la *densité de courant* et l'*induction magnétique*. La première influe sur les pertes dans *le cuivre* par effet Joule :

$$P_{\text{joule}} = RI^2 = \frac{\rho l}{s} I^2 = \rho l s \left(\frac{I}{s}\right)^2 = \rho v \left(\frac{I}{s}\right)^2 = \rho v J^2$$

(v = volume du conducteur).

La deuxième commande les pertes dans le *fer* par hystérésis et par courants de Foucault [4-9 et 6-7]. C'est pourquoi la densité de courant apparaît aux techniciens comme une *charge du cuivre*, l'induction magnétique comme une *charge du fer*.

II. — Calcul de l'électroaimant

24. **Problème de l'électroaimant.** — Comme pour l'aimant permanent, il s'agit, dans un entrefer donné, de surface S de créer une induction B, autrement dit de faire passer un flux utile $\Phi = BS$ dans cet entrefer.

La solution de ce problème est donnée par l'équation d'Hopkinson [20]. On lui donne alors une forme plus pratique.

On peut l'écrire en effet :

$$nI = \frac{\Phi l_1}{\mu_1 s_1} + \frac{\Phi l_2}{\mu_2 s_2} + \frac{\Phi l_3}{\mu_3 s_3} = \frac{B_1 l_1}{\mu_1} + \frac{B_2 l_2}{\mu_2} + \frac{B_3 l_3}{\mu_3}$$

soit :

$$\underset{\text{A}}{nI} = \underset{\text{A/m}}{H_1} \times \underset{\text{m}}{l_1} + \underset{\text{A/m}}{H_2} \times \underset{\text{m}}{l_2} + \underset{\text{A/m}}{H_3} \times \underset{\text{m}}{l_3}$$

Comme H représente un gradient de potentiel, chacun des termes du second membre représente une *chute de potentiel magnétique* dans la portion correspondante du circuit.

L'équation précédente exprime donc, comme la *formule d'Hopkinson*, que la F. M. M. créée par la bobine est consommée par les chutes de potentiel magnétique dans les différentes portions du circuit magnétique, tout comme la *loi d'Ohm généralisée* ($e = i\Sigma r$) exprime que la F. É. M. appliquée à un circuit électrique est consommée par la chute de tension électrique dans ses diverses portions.

Pour appliquer l'équation précédente, on dresse un tableau du modèle suivant (1) :

Partie du circuit magnétique	Φ webers	s m²	$B = \frac{\Phi}{s}$ T	A/m	l m	$I \times$ A/m
Entrefer (air)				800 000 B		
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
						Total = nI

(1) Dans le cas général où le flux n'est pas le même dans les différentes portions, on calcule les inductions $B = \Phi/s$ dans ces portions à partir des flux Φ qui les traversent.

REMARQUE I. — Dans l'entrefer, on a $B = \mu_0 H$, donc le nombre d'ampères par mètre est égal à $\frac{B}{4\pi \times 10^{-7}} = 8 \times 10^5 B$; résultat à retenir sous la forme suivante :

« *Dans l'air, il faut* 800 000 A/m par tesla. »

REMARQUE II. — Les fabricants de matériaux magnétiques donnent les courbes $B(H)$ de ces matériaux. Exemples :

INDUCTION B en teslas	FONTE GRISE		ACIER DOUX		TÔLES DE FER DOUX	
	μ_r	H(A/m)	μ_r	H(A/m	μ_r	H(A/m)
0,2	840	190	3 570	45	5 000	32
0,4	570	560	3 530	90	4 770	67
0,6	347	1 380	3 430	140	4 320	112
0,8	125	5 150	3 110	205	3 900	164
1		12 000	2 660	300	3 200	250
1,2			2 015	480	2 520	380
1,4			1 190	930	1 570	1 780
1,6			246	5 200	360	3 550
1,8			91	15 800	104	13 900

25. **Comment on obtient un flux à meilleur compte.** — Nous verrons dans l'étude des machines que les circuits magnétiques qu'elles comportent n'ont d'autre rôle que de canaliser un flux d'induction déterminé. Or le flux est engendré par la force magnétomotrice. Comme elle est le produit des ampères (nécessitant une section suffisante des conducteurs) par le nombre de spires (longueur de conducteur), cette F. M. M. *représente une masse de métal conducteur.*

Évidemment, tout constructeur a le souci d'atteindre son but — un flux déterminé — à meilleur compte, c'est-à-dire en employant le minimum de cuivre (1). Quelles conditions devront remplir, à cet égard, les circuits magnétiques de ces machines ?

1° *Minimum d'entrefers.* — C'est la condition majeure. Examinons le tableau précédent ; nous notons ceci : lorsque, dans une portion de circuit, l'induction est 1 tesla, chaque mètre de portion demandera :

300 A environ, si elle est en acier doux ;

800 000 A, si elle est en air.

C'est net : les entrefers (portions d'air des circuits magnétiques) exigent, à longueur égale, *beaucoup plus de F. M. M.* que le fer et les alliages fer-carbone (2). C'est pourquoi, dans les machines, les constructeurs pour économiser le cuivre, réduisent au minimum les entrefers, les joints.

(1) En outre, moins de pertes-Joule et machine de meilleur rendement.

(2) On peut énoncer ce résultat autrement et dire : un entrefer est très réluctant. Pour un flux déterminé Φ dans le circuit magnétique, il provoque une forte chute de potentiel magnétique qui « consomme des ampères » tout comme une forte résistance R insérée dans un circuit électrique qui doit être parcouru par un courant I « absorbe des volts » par chute de tension RI.

Nous avons montré [4-13] que le flux d'induction est affaibli par la production d'un champ démagnétisant. Ici, au lieu d'être exprimée par le champ démagnétisant, la diminution de l'aimantation est exprimée par l'accroissement de réluctance de l'entrefer. Le résultat est le même.

On notera, à cet égard que, lorsque le circuit magnétique n'est pas saturé, on ne commet, dans la détermination de la F. M. M., qu'une erreur assez faible en négligeant le reste du circuit magnétique (partie métallique).

2° *Pas de saturation.* — Le graphe de B en fonction de H (fig. 4-10) montre que, dès que l'on atteint la zone de saturation (après le coude), une faible augmentation d'induction — et par conséquent de flux — n'est obtenue qu'au prix d'un grand accroissement de la F.M.M., donc de la masse de cuivre.

Par exemple, nous lisons que l'acier doux exige 480 A/m pour une induction de 1,2 tesla et 5 200 A/m, soit *dix fois plus* pour une induction de 1,6 tesla.

En conséquence, pour obtenir un flux à meilleur compte, il faut, dans toute partie du métal magnétique *éviter la saturation.*

A cet égard, tout étranglement du circuit, provoquant une saturation locale est désavantageux. On est ainsi conduit à des circuits *gros* (inductions plus faibles) et *courts* (influence de la longueur sur la réluctance).

Nous avons indiqué, sur la courbe $B(H)$ le point M qui est situé juste au-delà du coude et qui marque, d'une façon générale, l'état magnétique des portions de circuit des machines électriques : il correspond, suivant les matériaux, à des inductions allant de 0,7 à 1,6 tesla.

3° *Peu de fuites.* — Les fuites magnétiques obligent à créer, dans les bobines magnétisantes, un flux plus grand que le flux utile. On obtient donc le même flux utile avec une plus faible F. M. M. en réduisant l'importance des fuites. A cet égard, il convient de placer les bobines magnétisantes *le plus près possible* de la portion du circuit magnétique où le flux aura un effet utile.

Nous avons observé (tableau page précédente) que la fonte demande beaucoup plus de F. M. M. que l'acier. Cela explique la substitution de l'acier coulé à la fonte dans la constitution des carcasses des génératrices et des moteurs à courant continu.

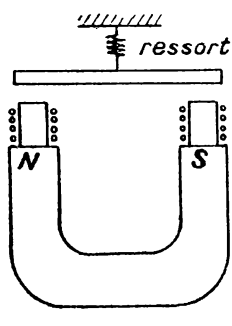


FIG. 5-32.

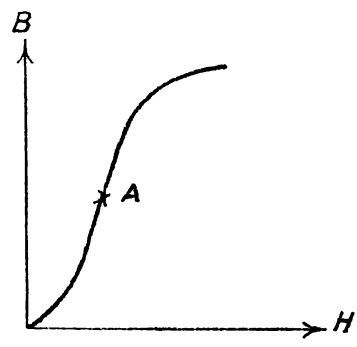


FIG. 5-33.

22. **Classification des électroaimants.** — On peut classer les électroaimants en trois catégories.

1° Les électroaimants de *générateurs* et *moteurs* dont le but est de créer une forte induction dans une région déterminée appelée entrefer.

2° Les appareils destinés à la *réalisation de déplacements* à volonté d'une pièce guidée appelée armature, on y distingue :

a) Les appareils *attirants* (fig. 32), c'est-à-dire opérant par attraction d'une pièce de fer doux appelée armature. Pour éviter que l'aimantation rémanente maintienne cette armature au contact des pôles lorsque le courant est coupé dans la bobine, on empêche par des butoirs le contact parfait entre pôles et armature.

Ce sont les électroaimants employés en télégraphie, téléphonie, signaux de chemins de fer, etc.... Lorsqu'on ne dispose que d'un faible courant, on emploie l'électroaimant *polarisé*, c'est-à-dire maintenu par un aimant permanent auxiliaire dans une aimantation correspondant au point A de la courbe $B(H)$. On voit en effet (fig 33) qu'en ce point, à une variation ΔH de l'excitation (donc du courant inducteur), correspond une variation très grande ΔB de l'induction, donc de l'attraction de l'armature (1).

b) Les électroaimants *avaleurs* qui s'appliquent au cas où l'armature

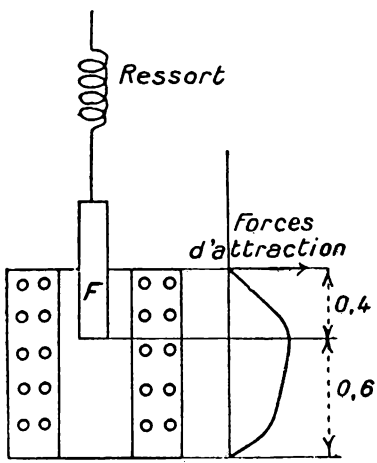


FIG. 5-34.

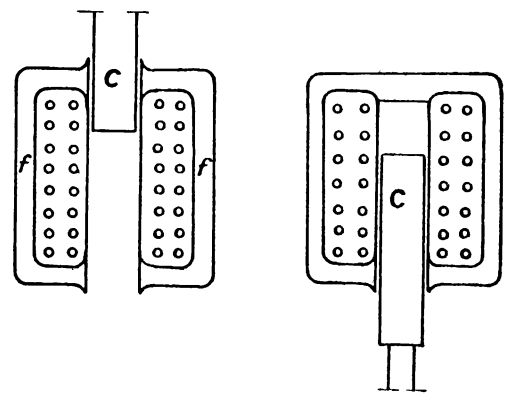


FIG. 5-35.

doit avoir un déplacement plus important (fig. 34). Elle constitue alors le noyau même de l'électroaimant. Elle est aspirée, conformément au *principe du flux maximal* [2-6] quel que soit le sens du courant dans la bobine. Pour réduire la réluctance du circuit magnétique, on entoure généralement la bobine d'une gaine extérieure en fer : on dit alors que l'électroaimant est *cuirassé* (fig. 35). Nous avons sur la figure 34 représenté la variation de la force d'attraction de l'armature en fonction de la position, de sa partie inférieure par rapport à la bobine (2).

Les appareils avaleurs ou à *succion* ont leur application dans les dis-

(1) On donne aux noyaux l'aimantation convenable en fixant ceux-ci aux extrémités d'un aimant permanent en U. On équilibre par un ressort l'attraction constante due à l'aimant permanent (fig. 32).

(2) Lorsque l'appareil est cuirassé, le champ est très intense et sensiblement uniforme à l'intérieur, mais négligeable à l'extérieur. Le noyau n'est donc attiré que lorsqu'il est introduit dans l'un des orifices de l'enveloppe.

joncteurs, les aiguillages électriques, certains relais et certains appareils de mesure.

3° Les appareils *à attraction durable.* Nous distinguerons :

a) Les électroaimants *contacteurs* dont la constitution ne diffère pas en principe de celle des appareils attirants et qui ont pour rôle, par déplacement durable de l'armature de fermer ou d'ouvrir un circuit électrique auxiliaire. Ce sont les électroaimants des relais électromagnétiques.

b) Les électroaimants *adhérents* qui doivent maintenir une force

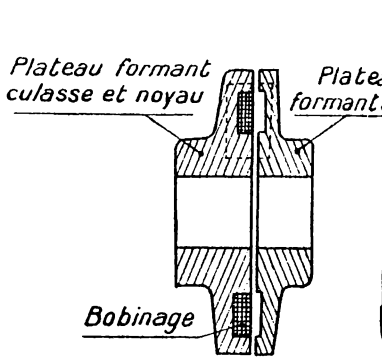


FIG. 5-36.

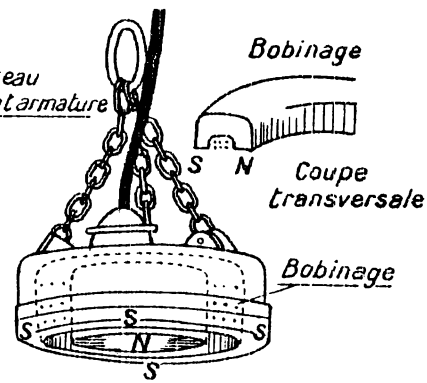


FIG. 5-37.

d'adhérence suffisante entre noyaux et armature : ce sont les électroaimants d'embrayage électromagnétique (fig. 36) et les électroaimants de levage. La figure 37 montre la disposition le plus fréquemment adoptée pour ces derniers : noyau central formant le pôle N, tout autour

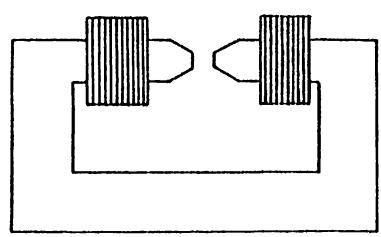


FIG. 5-38.

de celui-ci, en couronne, le pôle S et, dans la rainure comprise entre les pôles, la bobine bien protégée contre toute détérioration.

Signalons enfin que l'électroaimant a une application dans certaines recherches physiques nécessitant de grandes inductions. On lui donne alors la forme de la figure 38.

On voit, en définitive, l'importance de la découverte par Ampère de l'électroaimantation ; cette découverte est un des faits les plus saillants dans l'histoire de l'électricité.

III. — Matériaux magnétiques

Les matériaux magnétiques forment une gamme extrêmement étendue et leurs caractéristiques sont adaptées à leur utilisation. Ces caractéristiques ont été, durant ces dernières années améliorées de façon très sensible, grâce aux progrès réalisés dans la connaissance du magnétisme.

Nous classerons ces matériaux de la façon suivante :

1° Matériaux *doux* de grande perméabilité travaillant :

a) A induction constante ;

b) A induction variable.

2° Matériaux *durs* de grand champ coercitif.

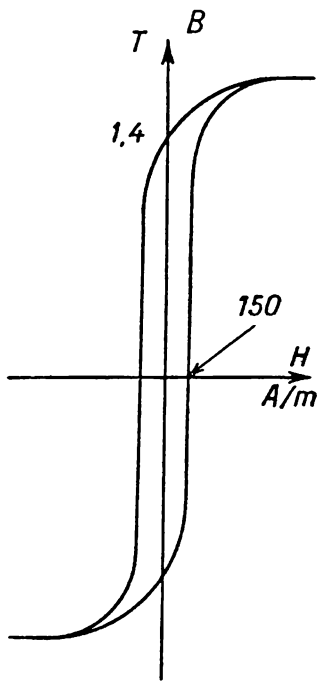


FIG. 5-39.

27. Premier cas. Matériaux doux dans lesquels l'induction est constante. — C'est, par exemple, le cas de l'inducteur d'une dynamo, d'un alternateur du noyau d'un électroaimant à courant continu. Une seule considération intervient alors : obtenir *à meilleur compte*, c'est-à-dire avec le plus faible champ, l'*induction la plus grande possible.* Cela revient à dire que les matériaux magnétiques les plus convenables sont les matériaux *à perméabilité élevée.*

C'est le fer pur qui répond le mieux à cette condition. Il s'en éloigne d'autant plus qu'il contient plus de carbone. Pratiquement, pour les électroaimants à courant continu, on emploie l'acier doux (faible teneur en C) dont nous avons représenté (fig. 39) la courbe de première aimantation et le cycle d'hystérésis. En comparant ces courbes à celles de l'acier dur (fig. 40) plus riche en carbone, l'avantage de l'acier doux apparaît avec évidence. Celui- ci est caractérisé par $B_r = 1$ à 1,2 tesla et $H_c = 100$ à 150 A/m.

Quand il s'agit de constituer des *écrans magnétiques* [5-22], on emploie des aciers spéciaux appelés alliages *hypermagnétiques.* Ce sont des alliages fer-nickel fortement chargés en nickel. Ils sont connus sous le nom industriel de *Mumétal* ou *Permalloy* C. [La figure 41 donne les courbes $B(H)$ et $\mu(H)$ du mumétal.]

En règle générale le maximum de μ_r a lieu pour un champ H d'autant plus faible que μ_r prend des valeurs plus élevées.

28. Deuxième cas. Matériaux doux où l'induction est variable. — Dans ce cas, il faut faire intervenir, en outre, une autre considération

plus importante : celle des pertes par hystérésis (1). Il faudra donc un matériau ayant un *cycle d'hystérésis de faible surface* [13], c'est-à-dire étroit, autrement dit un faible champ coercitif et une ***grande résisti-***

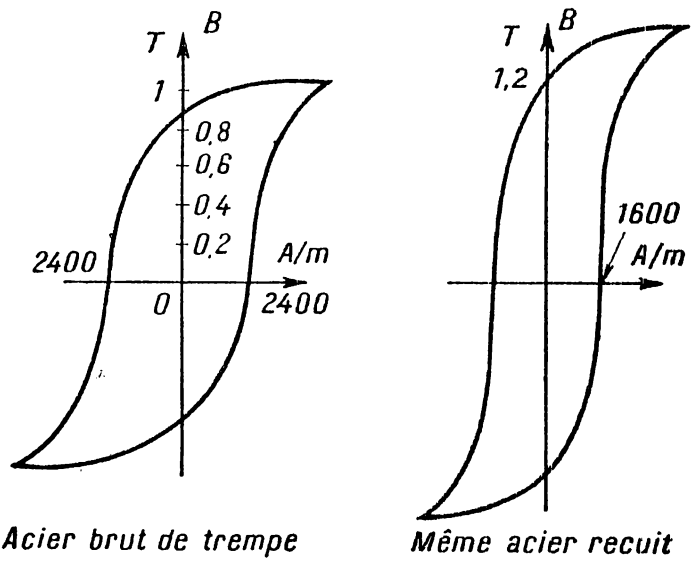


FIG. 5-40.

vité (1). Autrefois on employait l'acier très doux $H_c = 80$ à 160 A/m. On emploie aujourd'hui :

a) Pour les organes qui, dans les machines électriques sont soumis à

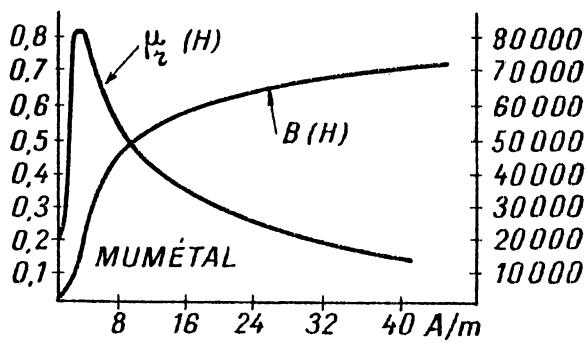


FIG. 5-41.

des inductions variables (noyaux de transformateurs, armatures d'induit de dynamos et d'alternateurs, noyaux d'électroaimants à courant alternatif), l'acier au silicium dont les avantages sensibles quant aux pertes, très faibles quant à la perméabilité, apparaissent dans le tableau page suivante :

(1) A cause des courants de Foucault. Il en sera question plus loin [6-19].

Matériau	Perméabilité relative initiale	Résistivité Ω m²/m	Pertes par m³ par cycle pour $B_m = 1$ T
Acier doux. Tôle ordinaire	250	10^{-8} × 11 à 15	180 joules
Acier à 2 % Si.....	300	× 40	85 —
Acier à 3,5 % Si (1).....	350	× 60	75 —
Alliages Fe-Ni. Classe II.	1 000 à 2 500	× 450 à 500	30 —

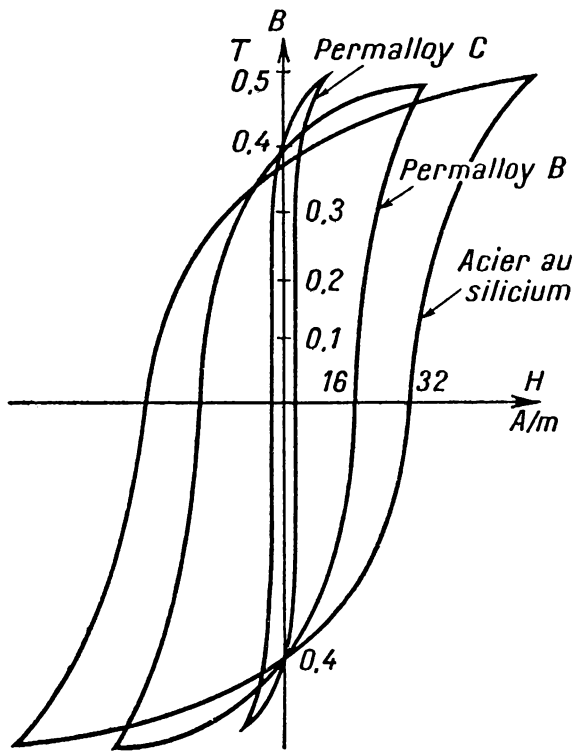


Fig. 5-42.

b) Pour les petits appareils (transformateurs de radio, appareils de mesures, palettes de pick-up), on emploie les alliages Fe-Ni dont le prix est beaucoup plus élevé (Anhyster D, Permalloy B, Permax). Il est essentiel d'observer que ces alliages Fe-Ni ont leur perméabilité maxi-

(1) Récemment, on a donné à ces matériaux par orientation de leurs cristaux (laminage à froid, traitement thermique convenable) une perméabilité beaucoup plus grande, des pertes sensiblement plus faibles. Mais les propriétés remarquables de ces matériaux (tôles à grains orientés) n'existent que lorsque le flux circule dans la direction du laminage.

male pour une valeur du champ plus élevée que dans le cas des alliages précédents (fig. 42). Cela tient au fait que dans leurs applications, les alliages que nous considérons ici sont généralement soumis à un champ continu superposé au champ alternatif et il convient que la première, si faible soit-elle, ne réduise pas fortement la perméabilité du métal.

c) Quand la fréquence des variations de H est importante, on emploie des *ferrites doux* [4-2], malgré leur perméabilité relativement faible. Cela tient à leur grande résistivité qui réduit fortement les pertes par courants de Foucault (1).

Signalons que les ferrites (2) sont caractérisés, en général, par un *cycle d'hystérésis quasi rectangulaire* (fig. 43). Cette propriété a des applications très importantes en électronique (transducteurs, calculateurs, technique du radar, etc.).

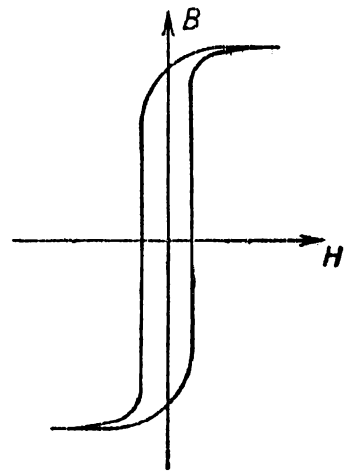


FIG. 5-43.

29. **Troisième cas. Matériaux durs pour aimants permanents.** — Ces matériaux sont caractérisés par un grand champ coercitif H_c et par une grande valeur maximale du produit d'énergie BH (fig. 44).

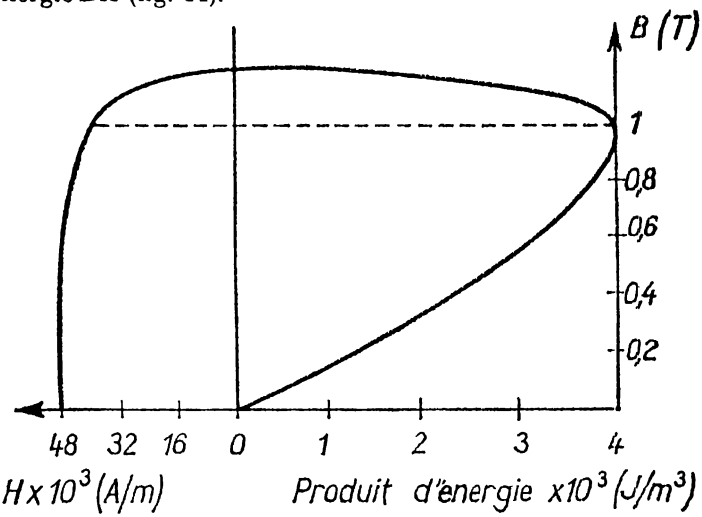


FIG. 5-44. — Courbe de désaimantation et produit d'énergie de l'Alnico.

(1) Nous montrerons en effet [6-19] que ces pertes sont proportionnelles au *carré de la fréquence* et inversement proportionnelles à la résistivité du matériau.

(2) Les ferrites sont des substances ferrimagnétiques [4-2]. Le ferrimagnétisme est une propriété qui confère une souplesse d'emploi beaucoup plus grande qu'avec les aimants métalliques. D'où les variations quasi infinies des propriétés des ferrites suivant leur composition. On a dit : « la préparation des ferrites est un art au même titre que la cuisine française ».

Après les aciers *martensitiques*, perfectionnés par addition de tungstène, puis de cobalt, mais aujourd'hui dépassés, on emploie actuellement :

a) Les *alliages* Fe Ni Al dans lesquels la finesse du grain et les tensions internes accroissent le champ coercitif.

b) La *poudre de fer* très fine et très fortement comprimée, dont nous avons déjà expliqué [4-3] la propriété.

c) Les alliages à *trempe magnétique*, obtenus en portant ces alliages à une température inférieure à leur point de Curie ; mais cette température est si élevée que l'alliage encore magnétique est susceptible de déformations internes. On les soumet à un champ très élevé : des déformations

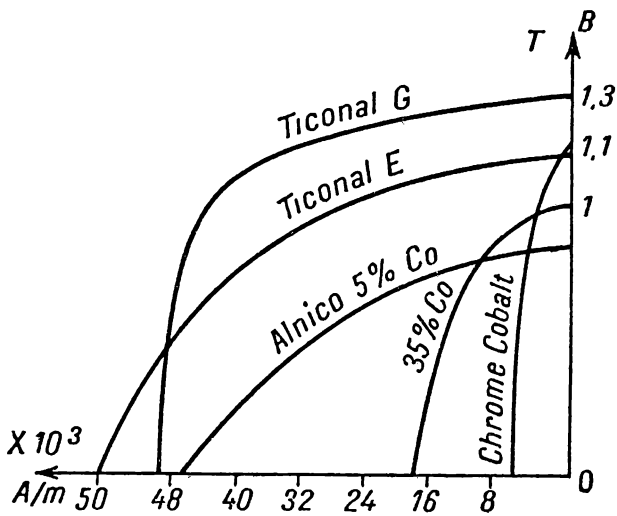


FIG. 5-45.

internes se produisent dans la direction de ce champ et sont rendues irréversibles par un refroidissement brusque, ce sont les *aciers anisotropes* fabriqués dans les pays anglo-saxons sous le nom d'*Alnico*, en France sous le nom de *Ticonal*. Ils ont permis de multiplier par 2 ou 3 la sensibilité des appareils de mesures, de diviser par 2 ou 3 le volume des anciens aimants (fig. 45).

MATÉRIAU MAGNÉTIQUE	B_r T	$H_c \times 10^3$ (A/m)	$B'H' \times 10^3$ (J/m³)
Acier à 35 % de cobalt (1921)	0,8	16,8	7,2
Acier au Ni-Al (1932)	0,9	30,7	9,5
Acier au Ni-Co-Ti (1934)	0,7	68	12,8
Acier au Fe-Pt (1936)	0,7	160	24
Acier Co-Pt (1937)	0,4	220	27,2
Acier Ticonal 3,8 (1939)	0,12	50	30
Acier Ticonal 5,2 (1940)	0,122	52	41,5
Céramique (agglomérés d'oxydes)	0,2	160	64
Poudre de fer	0,5	48	13,6

d) Les *ferrites durs* qui permettent de réaliser des aimants à la fois très puissants et *presque isolants*, particulièrement précieux toutes les fois que l'on risque des pertes excessives par courants de Foucault [6-19], c'est-à-dire en Radiotechnique.

Les progrès accomplis dans l'élaboration des matériaux magnétiques ont été liés à une meilleure connaissance du ferromagnétisme (1). Ils peuvent se poursuivre. Ils sont déjà tels que la forte réduction qu'ils permettent des dimensions des aimants compense leur prix plus élevé. Ils apparaissent dans le tableau ci-contre et les courbes de la figure 45.

(1) Elle a permis l'élaboration d'alliages magnétiques à partir de matériaux non magnétiques.

CHAPITRE 6

INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Les phénomènes d'induction électromagnétique ont été découverts en 1831 par le physicien anglais FARADAY.

1. **Expériences fondamentales.** — Une bobine B_2 (fig. 1) est reliée à un galvanomètre polarisé dont le zéro est au milieu de sa graduation de façon à constituer un circuit (2). Sur cette bobine B_2, faisons agir :

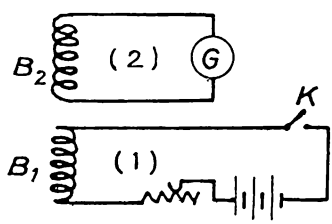


FIG. 6-1.

1° UNE BOBINE B_1 dans les conditions suivantes :

a) B_1 *est en position fixe*, parcourue par un courant I réglé par un rhéostat Rh et pouvant être coupé par un interrupteur K. Quand on ferme l'interrupteur K ou bien quand, par le jeu du rhéostat, on fait croître le courant I, le galvanomètre G dévie temporairement dans un sens; quand on ouvre K ou quand on fait décroître I, le galvanomètre dévie temporairement en sens contraire.

b) Le *courant I est maintenu constant*, mais on éloigne B_1 de B_2. Au cours de cet éloignement le galvanomètre G dévie. Quand on rapproche B_1 de B_2, la déviation temporaire du galvanomètre est opposée à la précédente.

c) *Le courant I est maintenu constant et les bobines sont dans une position fixe* (fig. 2). Introduisons dans B_1 un barreau de fer doux. Pendant cette introduction, G dévie. La déviation est de sens inverse quand on retire le barreau.

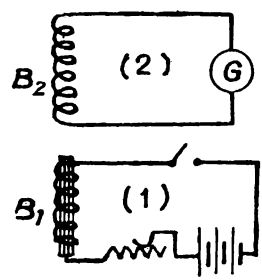


FIG. 6-2.

2° UN BARREAU AIMANTÉ NS que nous rapprochons ou éloignons de la bobine B_1. Au cours du rapprochement, le galvanomètre G dévie ; il dévie en sens inverse au cours de l'éloignement du même pôle ou bien au cours du rapprochement du pôle de nom contraire.

Le phénomène observé (production d'un courant temporaire par action apparemment à distance) est appelé *induction électromagnétique.* Le circuit (2) dans lequel le phénomène se produit est le *circuit induit.* Le courant temporaire dans le circuit (2) est appelé *courant induit.*

Comme dans tout circuit, un courant est dû à une force électromotrice, on désigne sous le nom de *force électromotrice d'induction*, celle qui crée le courant induit.

FORCE ÉLECTROMOTRICE D'INDUCTION

2. **La F.É.M. d'induction résulte généralement d'une variation de flux embrassé.** — Dans les expériences précédentes, *la seule liaison* entre B_1 et B_2 était le flux d'induction (une partie du flux de B_1 atteignait B_2) et c'était ce flux à travers B_2 qui variait. Nous sommes donc conduits à admettre que la F.É.M. d'induction est due à la variation de ce flux d'induction.

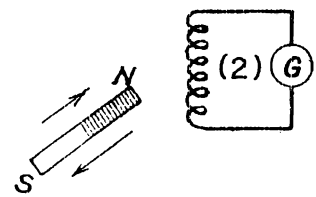


FIG. 6-3.

Nous soulignons flux *d'induction* car lorsque nous avons immergé dans B_1 le noyau de fer doux, l'induction B dans la bobine B_1 a été accrue (le champ magnétique H n'a pas varié) et par conséquent seul a varié le *flux du vecteur B*.

Dans ces conditions, nos observations montrent que c'est seulement au cours de la variation du flux embrassé par B_2 qu'une F.É.M. d'induction s'est produite. Concluons :

Tout accroissement de flux embrassé par un circuit produit une F.É.M. d'induction dans un certain sens. Toute diminution de flux embrassé produit une F.É.M. inverse.

3. **Toujours la F.É.M. d'induction résulte d'un flux coupé.** — Soit un aimant en fer à cheval (fig. 4) dans l'entrefer duquel nous plaçons, normalement à ses lignes d'induction, la portion rectiligne AB d'un circuit $ACDB$ comportant un galvanomètre.

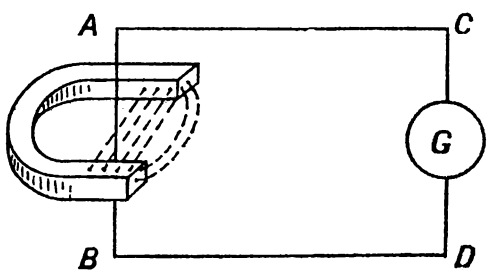


FIG. 6-4.

L'expérience montre que le galvanomètre *dévie* quand on déplace AB perpendiculairement à lui-même ; il *ne dévie pas* si on opère soit une rotation autour de AB, soit une translation parallèle à AB.

Il n'y a donc F.É.M. induite dans le circuit que si la portion AB de celui-ci *coupe du flux*. Des expériences indiscutables [1] ont montré que cette condition est nécessaire.

Quand un circuit est le siège d'une F.É.M. d'induction, il faut vérifier qu'il y a flux coupé, admettre, par exemple que, dans l'expérience 1° *a*) du paragraphe 1, le flux à travers la bobine B_2 est, quand on a fermé l'interrupteur K, venu de l'extérieur.

[1] Effectuées en 1914 par André Blondel.

4. **Flux coupé et variation de flux embrassé.** — La loi du flux coupé est la seule bonne théoriquement. Comme en général lorsqu'une portion de conducteur d'un circuit coupe du flux, le flux embrassé par le circuit varie d'une quantité égale au flux coupé, *les lois du flux coupé et du flux embrassé conduisent le plus souvent au même résultat* et l'on a généralement avantage (simplification des calculs) à appliquer la seconde. Mais, dans ce cas, il faut toujours vérifier que la variation de flux est bien obtenue *en faisant couper le flux* qui a été gagné ou perdu.

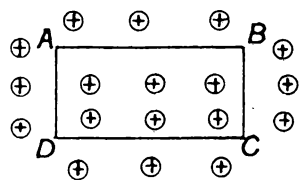


FIG. 6-5.

Par exemple, si on déplace dans le plan de la feuille (fig. 5) un circuit *ABCD* rectangulaire soumis à un champ d'induction *uniforme* normal à la feuille, l'expérience montre qu'il n'y a pas de courant induit. Ce résultat était immédiatement déduit de la loi du flux embrassé, car au cours du déplacement du circuit, le flux embrassé par celui-ci ne variait pas. Mais les côtés du rectangle coupaient du flux. Il faut en conclure (ce n'était pas évident) que les F.É.M. induites dans les quatre côtés se détruisent.

Par contre, il faut faire appel à la loi du flux coupé pour comprendre la F.É.M. d'induction engendrée dans un disque de Faraday (fig. 6). Quand il tourne, le galvanomètre dévie. Il y a donc F.É.M. d'induction. On voit mal le circuit induit. Si le flux qu'il embrasse varie, il doit varier toujours dans le même sens, ce qui est absurde. Il faut considérer le disque comme formé d'une infinité de rayons (fig. 7) et dire que la F.É.M. d'induction est engendrée dans le rayon *OM* coupant le flux d'induction de l'aimant.

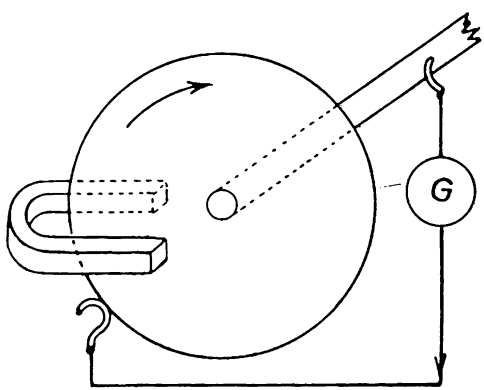


FIG. 6-6.

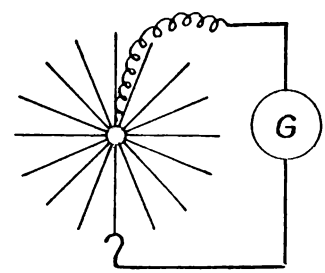


FIG. 6-7.

5. **Sens de la force électromotrice d'induction.** — Le sens de la F.É.M. d'induction dans un circuit est évidemment lié au sens dans lequel varie le flux embrassé par ce circuit ou le flux coupé par ses différentes portions.

1° *Circuit fermé. Loi de Lenz.* — Approchons d'une bobine *B* (fig. 8) un aimant *SN*. Il y a dans la bobine une F.É.M. induite et, si elle est en circuit fermé, courant induit. Quel sera le sens de ce courant ? Il sera nécessairement tel qu'il y ait répulsion entre la bobine *B* et l'aimant, car il y a énergie électrique produite dans *B*. Le principe de la conservation de l'énergie exige qu'il y ait travail *dépensé*, c'est-à-dire qu'il y ait une force à vaincre pour rapprocher de *N* la bobine *B*.

Réciproquement, et pour la même raison, il faut que le courant induit

par l'éloignement de l'aimant (fig. 9) détermine, entre l'aimant et la bobine, une force attractive. Nous sommes conduits à la loi de *Lenz* :

La F.É.M. d'induction qui prend naissance dans un circuit fermé tend à s'opposer à la variation de flux qui la produit et par conséquent à la cause de cette variation.

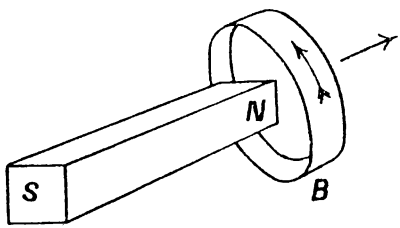


FIG. 6-8.

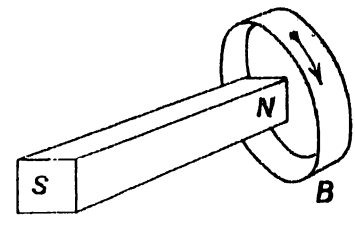


FIG. 6-9.

Il y a donc, dans la production d'un courant induit, une sorte *d'inertie électromagnétique* qui, par les forces qu'elle engendre, s'oppose aux variations de flux, comme l'inertie de la matière réagit, par les forces d'inertie, contre les variations de vitesse.

2° *Portion de conducteur. Règle des trois doigts (main gauche).*

Reportons-nous à la figure 2-4. Le déplacement de la portion *MQ*

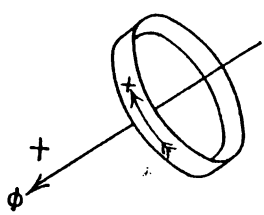


FIG. 6-10.

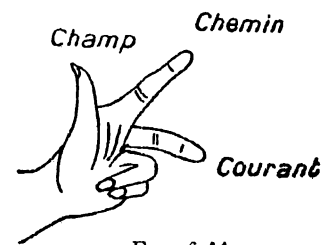


FIG. 6-11.

dans le sens *F* correspond à un accroissement de flux dans le circuit *MNPQ*. Pour s'opposer à cet accroissement de flux, la F.É.M. induite doit tendre à engendrer un courant dans le sens opposé à la flèche (1).

La règle des trois doigts [2-1] mais, appliquée de la *main gauche*, permet de retrouver ce sens. Un trièdre trirectangle étant constitué par les trois premiers doigts de la main gauche (2) :

le *pouce* prenant la direction et le sens du *champ* ou du vecteur induction ;

l'*index* prenant la direction et le sens du *chemin* (déplacement) ;

le *médius* aura la direction et le sens du *courant* induit ;

c'est-à-dire de la F.É.M. induite dans la portion de conducteur.

(1) En effet, un courant dans le sens opposé à la flèche engendre un flux de bas en haut qui se retranche du flux d'induction *B*.

(2) Pour se rappeler que cette règle doit être appliquée de la main gauche, il suffit de remarquer que les F.É.M. d'induction sont utilisées dans les générateurs (lettre *g*).

6. **Expressions de la force électromotrice d'induction.** — Deux rails rectilignes parallèles MN, PQ en métal non magnétique sont placés dans l'air et dans un plan normal à un champ magnétique d'induction uniforme B (par exemple le champ terrestre) (fig. 12).

Sur ces rails peut se déplacer normalement et en contact constant avec eux, une tige rectiligne CD. Entre les points N et Q, on branche un électromètre S très sensible.

L'expérience montre que, si on déplace la tige CD d'un mouvement de translation uniforme de vitesse v, la déviation de l'électromètre est constante et *proportionnelle à* v.

Comme le flux coupé (cause de production de la F.É.M. induite) est lui-même proportionnel à v, on peut conclure : la F.É.M. d'induction est *proportionnelle au flux coupé par unité de temps.* Nous écrirons donc :

$$e = K \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

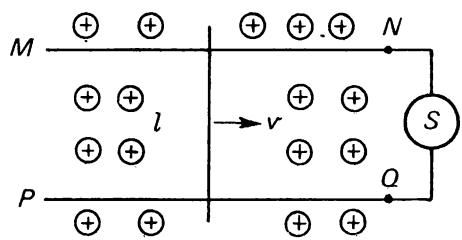


FIG. 6-12.

(K = facteur de proportionnalité ; $\Delta\Phi$ = flux coupé dans le temps Δt).

Le facteur K dépend seulement des unités choisies. Dans un système cohérent, K doit être égal à 1. Nous écrirons donc dans le système SI :

$$e_{\text{V}} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\ \begin{matrix}\text{Webers}\\ \text{s}\end{matrix}$$

Nous pouvons écrire aussi bien, en exprimant la variation de flux embrassé *par le flux coupé* :

$$e = KBlv \qquad (l = \text{longueur de la portion } CD)$$

soit, en unités correspondantes :

$$e_{\text{V}} = B_{\text{T}}\ l_{\text{m}}\ v_{\text{m/s}}$$

7. **Généralisation de ces expressions.** — Les expressions précédentes doivent être généralisées :

1° Au cas où *le mouvement de CD n'est pas uniforme.* Si $d\Phi$ désigne la variation de flux embrassé par le circuit entre les instants t et $t + dt$, la F.É.M. d'induction à l'instant t s'exprime par $e = d\Phi/dt$ ou $e = Bl\nu$ (ν = vitesse instantanée).

2° Au cas où le conducteur *CD n'est pas normal à sa vitesse* (fig. 13).

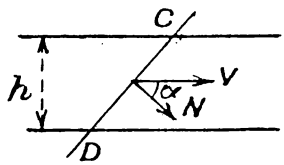


FIG. 6-13.

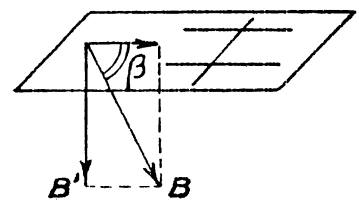


FIG. 6-14.

C'est le cas où il est oblique par rapport aux rails. Si on désigne par h la distance des deux rails :

$$e = Bh\nu = B \cdot l \cos \alpha \cdot \nu = Bl \cdot \nu \cos \alpha,$$

on voit qu'il suffit de faire intervenir dans l'expression $e = Bl\nu$ la composante de la vitesse qui est normale à la portion conductrice.

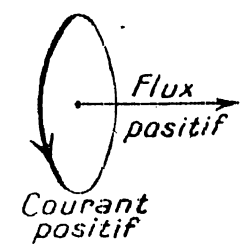


FIG. 6-15.

3° Au cas où le vecteur B *n'est pas normal au plan P dans lequel le conducteur se déplace* (fig. 14). Il suffit d'adopter pour induction la composante active $B' = B \sin \beta$ (β = angle de B avec le plan P), c'est-à-dire la seule composante qui est coupée par le conducteur *CD*.

4° Au cas d'une *bobine de n spires* dont le flux embrassé varie de $\Delta\Phi$. Les spires sont en série. Leurs F.É.M. s'ajoutent et comme elles sont identiques, la F.É.M. d'induction est $e = n\,\Delta\Phi/\Delta t$. On peut écrire aussi bien $e = \Delta\Phi/\Delta t$ à condition de désigner par Φ le flux *total* embrassé (c'est-à-dire le produit du flux par le nombre de spires).

5° Enfin, si l'on veut exprimer la F.É.M. induite *en grandeur et en signe*, il faut l'exprimer par $e = -d\Phi/dt$. En effet, à un courant positif (fig. 15), la règle du tire-bouchon fait correspondre un flux positif. Si ce flux croît, la loi de Lenz veut que la F.É.M. induite soit négative puisqu'elle tend à produire un courant négatif.

A $d\Phi > 0$ doit correspondre $e < 0$. On écrira donc $e = -d\Phi/dt$. En définitive les formules générales de la F.É.M. d'induction sont les suivantes :

$$\boxed{e = -\frac{d\Phi}{dt}} \qquad \boxed{e = Bl\nu}$$

$d\Phi$ = variation de flux total embrassé dans le temps dt ;
B = composante normale au plan défini par l et ν ;
ν = projection de la vitesse sur la normale au conducteur.

REMARQUE. — Pour exprimer la variation du flux embrassé par une bobine, il faut tenir compte du signe des flux (fig. 16), c'est-à-dire affecter

du signe + tout flux qui sort par une face déterminée (la face A par exemple) du circuit. C'est ainsi que, lorsqu'on fait tourner de 180° une bobine sur elle-même, le flux embrassé varie de + Φ à — Φ, soit de 2 Φ.

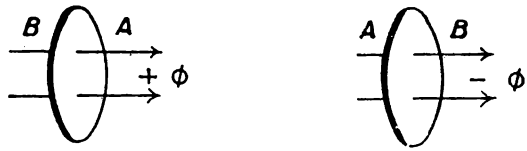


FIG. 6-16.

8. **Circuit induit presque fermé. Circuit fermé.** — Dans les circuits induits que nous avons considérés jusqu'ici, la F. É. M. était induite par variation d'un flux Φ que nous appellerons flux *extérieur* Φ_e.

Mais lorsque le circuit induit est fermé, il est parcouru par un *courant induit* et celui-ci engendre un *flux propre* Φ_i. Ce flux propre Φ_i varie tout comme le flux Φ_e et, en définitive, le flux embrassé qui varie dans le circuit est le flux résultant :

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_i \qquad \text{(somme algébrique)}$$

Dès lors une question se pose : la F. É. M. d'induction dans un circuit fermé est-elle due uniquement à la variation du flux extérieur Φ_e ou bien à la variation du flux résultant Φ ?

La réponse à cette question est donnée par l'expérience et la voici : le circuit *fermé* soumis à la variation d'un *flux total* Φ est le siège de la *même F. É. M.* que ce même circuit *presque fermé* soumis à la variation de flux Φ_e. C'est dire que la variation du flux propre Φ_i intervient, dans la production de la F. É. M. d'induction, au même titre que le flux extérieur.

Ce fait pouvait être prévu théoriquement. En effet, si nous écrivions :

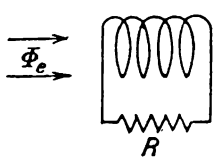


FIG. 6-17.

$$e = -\frac{d\Phi_e}{dt}$$

dans le cas d'un circuit fermé de résistance R (fig. 17), le courant à l'instant t aurait pour expression $i = e/R$.

En rendant le circuit supraconducteur ($R = 0$), on aurait $i = \infty$, ce qui est contraire à l'expérience. Il faut donc que e tende vers zéro en même temps que R et pour cela que *la variation de* Φ_i *annule la variation de* Φ_e :

$$\Delta\Phi_i = -\Delta\Phi_e$$

d'où :

$$\Phi_i = -\Phi_e \qquad \text{et} \qquad \Phi = \Phi_e - \Phi_i = 0.$$

Retenons donc ce résultat important :

Lorsque le circuit induit est fermé, la F. É. M. induite est due à la variation du flux résultant (somme algébrique du flux extérieur Φ_e et du flux propre Φ_i).

9. Explication électronique de la F.É.M. d'induction. Champ électromoteur. — Déplaçons un barreau métallique AB perpendiculairement aux lignes d'induction normales au plan de la feuille dans la direction et le sens indiqués par la figure 18 (1). Les électrons errants du métal animés — en plus de leur vitesse d'agitation désordonnée — d'une vitesse dans le sens de déplacement forment un courant électronique dans ce même sens. Ils sont donc soumis à des forces électromagnétiques [2-1] perpendiculaires à la fois au courant et au déplacement, c'est-à-dire dans le sens même du barreau. Ils viennent donc s'accumuler à une extrémité (ici l'extrémité A) et se raréfier à l'autre (ici l'extrémité B); c'est dire qu'une D.D.P. (la F.É.M. d'induction) apparaît entre A et B.

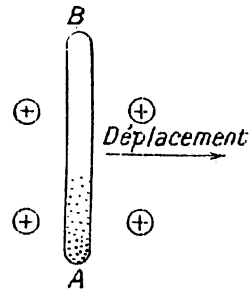


FIG. 6-18.

Il y a donc, entre A et B un gradient de potentiel, c'est-à-dire un champ électrique (dans le sens AB) qui tend à déplacer les électrons dans le sens BA. C'est un *champ électromoteur* :

$$E_m = (V_A - V_B)/l = B_n v l/l = B_n v$$

(l = longueur du barreau ; B_n = composante de l'induction magnétique normale au barreau ; v = vitesse de déplacement du barreau).

9 *bis.* **Expression différentielle de la loi de Faraday.** — Un circuit fermé C est traversé par un flux Φ variable. Il est le siège d'une F. É. M. :

$$e = -\partial\Phi/\partial t = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{(S)} \vec{B}\cdot\vec{dS} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{dS}$$

$\vec{B}$ désignant l'induction en un point d'une surface S s'appuyant sur le contour C.

Mais la F. É. M. e est aussi bien la circulation du vecteur champ électromoteur E le long du circuit considéré.

$$e = \oint_{(C)} \vec{E}\cdot\vec{dl} = \int_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}\cdot\vec{dS} \qquad \text{(Stokes)}$$

En comparant les deux expressions de la F. É. M. e :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}}$$

C'est l'*équation de Maxwell-Faraday.*

10. Vérifications expérimentales. — 1° *Résistances mécaniques offertes par un champ à toute spire conductrice qui y pénètre ou qui en sort.* — On déplace une grosse spire de cuivre entre les surfaces polaires d'un

(1) Les croix (vues arrière de flèches) indiquent que les vecteurs induction perpendiculaires au plan de la feuille ont le sens avant-arrière.

puissant électroaimant. Lorsque la spire pénètre dans le champ ou bien en sort, c'est-à-dire lorsque le flux qu'elle embrasse est variable, on éprouve une résistance sensible au déplacement : il semble qu'on opère dans un milieu visqueux. Il y a répulsion à l'entrée dans le champ, attraction à la sortie comme le prévoit la loi de Lenz.

2° *Freinage des oscillations du cadre d'un galvanomètre.* — Le cadre d'un galvanomètre écarté de sa position d'équilibre est fermé sur un circuit de résistance R. Lorsqu'il oscille, il embrasse un flux Φ variable, d'où résulte la création d'un courant induit i qui, en vertu de la loi de Lenz, va s'opposer à la cause qui le produit, c'est-à-dire s'opposer aux oscillations du cadre en créant un couple de freinage (notations habituelles) :

$$\Gamma = \frac{\text{travail électromagnétique}}{\text{angle de rotation correspondant}} = \frac{i\,d\Phi}{d\theta} = \frac{e}{R}\frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{-1}{R}\frac{d\Phi}{dt} \times \frac{d\Phi}{d\theta}$$

$$= \frac{-1}{R}\left(\frac{d\Phi}{d\theta}\right)^2 \times \frac{d\theta}{dt},$$

$d\theta$ = angle dont a tourné le cadre pendant le temps dt ;

$d\Phi$ = variation correspondante du flux total coupé par les portions actives.

Si l'induction est radiale et constante, le rapport $\frac{d\Phi}{d\theta}$ est constant. On voit que le couple de freinage est proportionnel à la vitesse de rotation $\frac{d\theta}{dt}$ du cadre et inversement proportionnel à la résistance R.

3° *Sens relatif des courants induits par une bobine dans une autre bobine.* — Soit une spire A dite *inductrice* dans laquelle nous pouvons créer et rompre un courant électrique et, parallèlement à elle, une deuxième spire B dite *induite* fermée sur un galvanomètre (fig. 19). Le dispositif est tel qu'une partie du flux créé par la spire A soit embrassée par la spire B. Nous observons que :

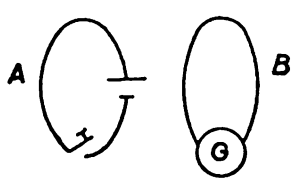


FIG. 6-19.

1° Lorsque nous fermons le circuit de la spire A (le flux embrassé par B augmente), le courant dans la spire B est de sens opposé au courant dans A.

2° Lorsque le courant dans la spire A est constant, le courant dans B est nul.

3° Lorsque nous coupons le circuit de la spire A, le courant dans B a le même sens que dans A.

11. Explication par la loi de Lenz du diamagnétisme. — Lorsqu'un électron de charge $(-e)$ tourne autour du noyau de l'atome à la vitesse de n tr/s, tout se passe comme si son orbite était une spire parcourue par le courant ne, spire dont le moment électromagnétique proportionnel à i [2-8] est proportionnel à la vitesse de rotation n (1).

Chacun des circuits élémentaires des électrons doit être considéré comme un *circuit sans résistance* puisque le courant (comme dans un cir-

(1) Dans la réalité, le moment magnétique de l'atome est dû presque exclusivement au *spin* des électrons tournant sur eux-mêmes [4-2]. Mais cela ne diminue pas la validité de l'explication donnée.

cuit supraconducteur) y persiste indéfiniment. L'intensité du courant varie donc de façon à s'opposer *totalement* [8] à la variation de flux que tendrait à produire l'application du champ magnétique extérieur.

Appliquons à un circuit élémentaire une induction extérieure parallèle à son moment magnétique et de même sens que celui-ci. Comme

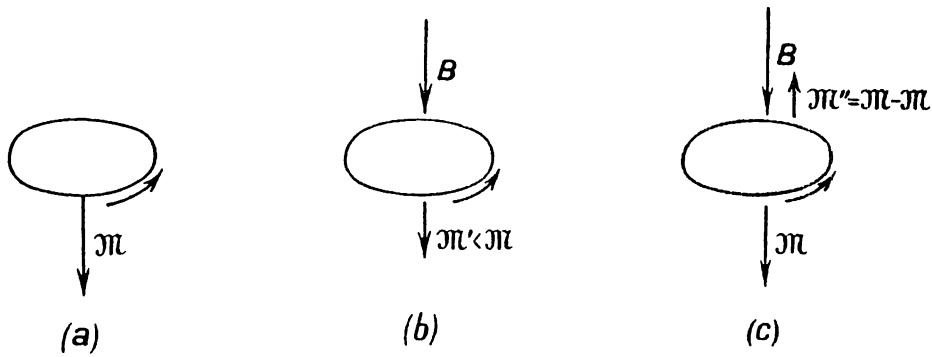


FIG. 6-20.

a) État initial ; *b*) Application de l'induction extérieure B dans le sens de $\mathfrak{M}$; la vitesse de rotation des électrons diminue ; le moment magnétique du circuit devient $\mathfrak{M}' < \mathfrak{M}$; *c*) Tout se passe comme s'il apparaissait $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$ *opposé* à l'induction appliquée B.

cette induction tend à *augmenter* le flux préexistant (flux dû au courant du circuit), le courant du circuit va *diminuer* de même que le moment électromagnétique du circuit (fig. 20).

Inversement, si l'induction extérieure est de sens opposé au moment électromagnétique du circuit, elle tend à augmenter le courant dans le circuit (fig. 21). Dans un cas comme dans l'autre :

L'application d'une induction magnétique B à un petit circuit lui donne un moment magnétique (c'est-à-dire une aimantation) supplémentaire toujours opposée à l'induction appliquée (1).

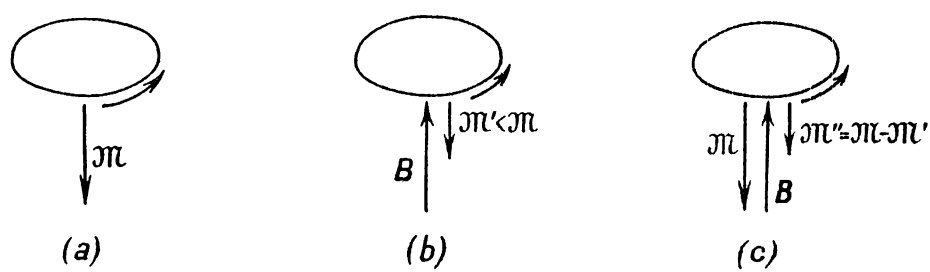


FIG. 6-21.

Cas où l'induction appliquée est opposée au moment magnétique $\mathfrak{M}$ du circuit. Elle a pour effet d'accroître la vitesse de rotation de l'électron ($\mathfrak{M}' > \mathfrak{M}$) et tout se passe comme s'il apparaissait $\mathfrak{M}''$ *opposé* à l'induction B. Même résultat que dans le cas précédent.

(1) Noter la différence fondamentale qui existe entre l'aimantation par un champ magnétique et la polarisation par un champ électrique. Dans cette dernière, le moment électrique du dipôle créé par un champ est toujours *de même sens* que ce champ.

Notons que la variation de moment magnétique (ou variation d'aimantation) due à l'application de B est extrêmement faible. Cela tient au fait qu'un circuit élémentaire est de très petit rayon et que l'induction qu'il crée lui-même en son centre est *beaucoup plus grande* que l'induction extérieure B. Dès lors, les inductions externes ne produisent que de très faibles variations *relatives* des moments électromagnétiques des circuits.

Le diamagnétisme existe donc dans tous les corps ; mais dans les corps paramagnétiques [4-2] pour lesquels le moment électromagnétique n'est pas nul, le *paramagnétisme* (orientation dans la direction de B du moment magnétique de la molécule) *masque le diamagnétisme.* La preuve est que le paramagnétisme décroît quand la température s'élève.

12. **Modes de production des F.É.M. d'induction.** — 1° *Modes cycliques.* — Soit une bobine A en regard d'une bobine C parcourue par un courant et créant un champ (fig. 22). Pour produire dans A une F.É.M. d'induction, il faut faire varier le flux d'induction que cette bobine embrasse. Ce flux d'induction dépend du champ H de la bobine C, de la réluctance du circuit magnétique commun aux deux bobines et de la position de la bobine A par rapport aux lignes d'induction de ce circuit.

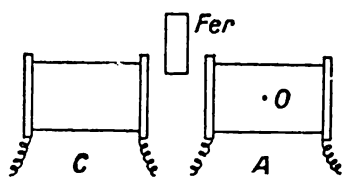


FIG. 6-22.

Les facteurs sur lesquels on agira seront donc :

a) L'*induction B* par variation de l'intensité du courant dit *inducteur* dans la bobine C. Tel est le cas des *transformateurs statiques* (tome II) et de la bobine Ruhmkorff [13].

b) La *réluctance* du circuit magnétique en interposant périodiquement du fer dans ce circuit.

Ce procédé est appliqué dans certains *alternateurs haute fréquence* (tome II) et dans la *magnéto à volet* (fig. 23). On voit que la rotation du

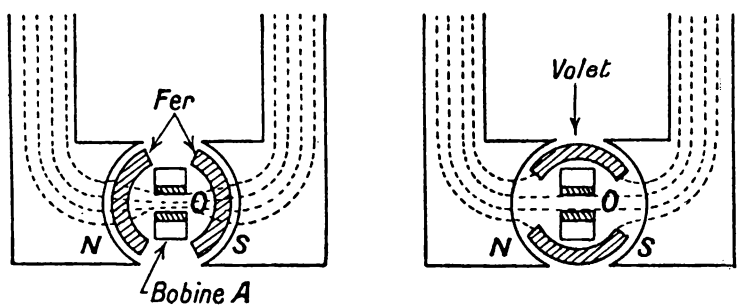


FIG. 6-23.

volet en fer inséré entre la bobine induite fixe et l'aimant permanent a pour effet de faire varier la perméabilité de l'intervalle compris entre eux, de modifier la réluctance du circuit magnétique, donc de faire varier le flux d'induction à travers la bobine A.

c) La *position* de la bobine *A* par rapport aux lignes d'induction par rotation de celle-ci autour d'un axe *O*. C'est ainsi que l'on produit les F.É.M. d'induction dans les *générateurs industriels* suivant le schéma de la figure 24 : des bobines liées à un cylindre appelé rotor tournant entre les pôles d'un électroaimant et la F.É.M. induite est appliquée par des contacts glissants à un circuit extérieur.

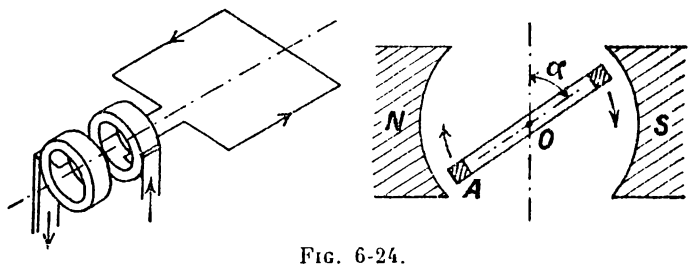


FIG. 6-24.

2° *Mode acyclique. Induction unipolaire.* — Dans tous les modes ci-dessus de production d'une F.É.M. d'induction :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

il était impossible d'obtenir une F.É.M. toujours de même sens parce qu'on ne pouvait faire croître continuellement le flux embrassé par la bobine induite. On réalisait un cycle de croissance et de décroissance périodique de ce flux. Les modes de production de la F.É.M. étaient *cycliques*.

Une expérience célèbre, réalisée par Faraday en 1831, a donné le principe de la production d'une F.É.M. continue par un mode *acyclique*.

Un barreau aimanté cylindrique *SN* (fig. 25) étant animé d'un mouvement de rotation, deux balais métalliques prennent contact l'un à sa

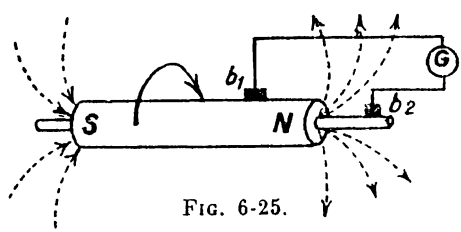


FIG. 6-25.

périphérie en b_1, l'autre sur son axe en b_2. On observe la production, d'un balai à l'autre, d'un courant qui est accusé par la déviation du galvanomètre *G*.

L'explication est la suivante : quelle que soit la rotation de l'aimant, son champ est *fixe dans l'espace*. Il n'y a donc pas de F. É. M. induite dans le fil conducteur mais *dans la matière de l'aimant* en mouvement dans une région où existe un champ magnétique.

(1) Pour le comprendre, il suffit de raisonner comme nous l'avons fait [4] pour le disque de Faraday et substituer à l'aimant une sorte de cage d'écureuil dont les barreaux seraient très rapprochés. La F. É. M. d'induction est engendrée dans ces barreaux.

Évidemment, pour la même vitesse de rotation, le flux coupé par seconde soit par le fil extérieur, soit par la ligne qui joint, dans l'aimant, les contacts $b_1 b_2$, est le même.

Comme les lignes d'induction actives sont toutes émises par un même pôle, on donne à ce phénomène le nom d'*induction unipolaire* : il ne comporte plus de cycle de fonctionnement. C'est pourquoi les machines qui appliquent l'induction unipolaire et que nous étudierons (tome 3) sont appelées génératrices *acycliques*.

13. **Applications des phénomènes d'induction électromagnétique.** — 1° *Alternateurs et dynamos.* — Nous avons montré [12] comment, par rotation d'une bobine dans le champ magnétique d'un électroaimant, il est possible d'engendrer une F. É. M. d'induction recueillie par des contacts glissants.

Dans le dispositif schématique de la figure 24, la F. É. M. induite change de sens deux fois par tour, parce que le sens de cette F. É. M. dépend du sens des lignes de force coupées par les portions actives de la bobine tournante : ce sens est inversé en passant d'un pôle N à un pôle S. Tel est le schéma d'une machine créant une F. É. M. *alternative*, c'est-à-dire d'un *alternateur*.

L'alternateur est donc le générateur mécanique le plus simple. En substituant aux bagues collectrices un commutateur spécial appelé *collecteur* qui inverse les connexions de la bobine et du circuit alimenté toutes les fois que les portions actives franchissent la ligne neutre (fig. 24), c'est-à-dire toutes les fois que la F. É. M. change de sens dans la bobine, il

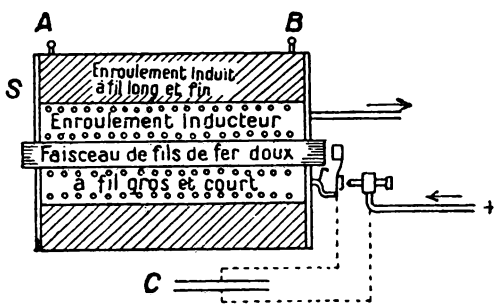


FIG. 6-26.

est possible d'appliquer au circuit une F. É. M. toujours de même sens et d'obtenir un courant de sens invariable. Tel est le principe des *dynamos*, c'est-à-dire des générateurs mécaniques à courant continu.

Dans ces deux générateurs, les courants induits s'opposant (loi de Lenz) à la cause qui les produit provoquent un *couple résistant*, c'est-à-dire opposé à la rotation : ainsi s'explique la dépense de travail mécanique qui est nécessaire pour l'obtention d'énergie électrique.

Réciproquement, si on fait passer, à l'aide d'une source extérieure, un courant électrique dans ces générateurs, les forces électromagnétiques détermineront la rotation de l'organe mobile, autrement dit feront

fonctionner ces machines en *moteurs*. Dans ce cas, la F. É. M. d'induction est opposée au courant et joue le rôle de force contre-électromotrice. Nous faisons apparaître ici la *réversibilité* des machines électriques.

2° *Transformateur et bobine de Ruhmkorff.* — Nous avons vu qu'une F. É. M. peut être induite dans une bobine A par variation du courant inducteur dans une bobine C. Dans le *transformateur* statique, C est traversé par un courant alternatif et la F. É. M. induite dans A est également alternative.

Dans la *bobine d'induction* (fig. 26) ou *bobine de Ruhmkorff*, la variation du courant inducteur est obtenue par la rupture périodique d'un courant continu. La bobine primaire P (inductrice) ne comporte qu'un petit nombre de spires de gros fil et la bobine secondaire (induite) un très grand nombre de spires de telle sorte que la F. É. M. qui y est induite est très grande et capable de produire des effets comparables à ceux des machines électrostatiques les plus puissantes (application aux ampoules génératrices de rayons X).

Ces F. É. M. saccadées se produisent à chaque rupture du courant inducteur, rupture réalisée, dans les petits modèles, par un simple interrupteur à trembleur. Nous expliquerons dans le chapitre suivant la présence du condensateur C en dérivation sur l'interrupteur, ainsi que la création d'une F. É. M. secondaire beaucoup plus grande à l'ouverture qu'à la fermeture du circuit primaire.

QUANTITÉ D'ÉLECTRICITÉ INDUITE

14. **Expression de la quantité d'électricité induite.** — Un circuit fermé de résistance R soumis à l'instant t à l'action d'une F. É. M. $e = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ est parcouru par un courant induit :

$$I = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

Pendant le temps $\mathrm{d}t$, ce courant transporte la quantité d'électricité $\mathrm{d}q = I\,\mathrm{d}t = -\mathrm{d}\Phi/R$. Donc la quantité d'électricité qu'il transporte entre les instants t_1 et t_2 où il embrasse les flux *totaux* Φ_1 et Φ_2 est :

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I\,\mathrm{d}t = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{\mathrm{d}\Phi}{R} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}.$$

Il faut bien noter que Φ_1 et Φ_2 sont les flux totaux embrassés par le circuit aux instants t_1 et t_2. Ils comprennent *le flux φ créé par le courant induit lui-même.* Mais si l'on applique la formule précédente entre deux instants où le courant induit est nul (1), l'intégration correspondant à ce

(1) Si l'on crée une variation de flux entre les instants t et $t + \theta$, Q désigne la quantité d'électricité qui a parcouru le circuit entre les instants $t_1 < t$ et $t_2 > t + \theta$.

flux φ s'effectue de $\varphi = 0$ à $\varphi = 0$. On n'a donc pas à tenir compte de ce flux φ et l'on écrit, en unités correspondantes *SI* :

$$\underset{\text{coulombs}}{Q} = \frac{\overset{\text{webers}}{\Delta\Phi}}{\underset{\text{ohms}}{R}}$$

$(\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2)$.

Ce qui est remarquable, c'est que la quantité d'électricité induite *ne dépend pas du temps* que le flux total embrassé met pour passer de Φ_1 à Φ_2. On s'expliquera ce résultat en observant que : si la vitesse de variation de flux est faible, il en est de même du courant induit, mais il dure longtemps; dans le cas contraire, le courant est intense, mais dure peu. La quantité d'électricité transportée est la même dans les deux cas.

15. **Mesure de la quantité d'électricité induite.** — La mesure d'une quantité d'électricité induite s'effectue facilement lorsque la variation de flux a lieu dans un temps très court. La quantité d'électricité induite passe alors dans le circuit dans un temps très réduit : on dit alors qu'il y a eu *décharge* (par analogie avec la brève décharge d'un condensateur).

On emploie, pour cette mesure, le *galvanomètre balistique* et le *fluxmètre* qui sont des galvanomètres à cadre mobile convenablement modifiés.

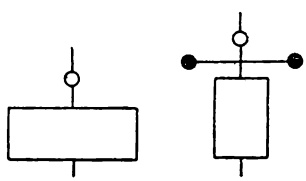


FIG. 6-27.

GALVANOMÈTRE BALISTIQUE. — On désigne sous ce nom tout galvanomètre à cadre dans lequel on a donné à l'équipage mobile un grand moment d'inertie par rapport à son axe de rotation, par exemple en augmentant la dimension transversale du cadre. Dans ces conditions, si la durée de la décharge qui traverse le galvanomètre est beaucoup plus courte que la période T d'oscillation (de l'ordre de 15 secondes) de l'équipage mobile, celui-ci ne s'est pas sensiblement déplacé pendant la durée de cette décharge : il a reçu un véritable choc après lequel il se met en mouvement avec une vitesse initiale ω_0.

Les couples agissant sur le cadre, si 0 est sa déviation à l'instant t, sont les suivants :

$J\frac{d^2\theta}{dt^2}$ (J = moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation), couple d'inertie ;

— $a\theta$ couple de rappel opposé à l'élongation angulaire 0, couple de torsion (a = constante de torsion du fil de suspension) ;

— $b\frac{d\theta}{dt}$ couple d'amortissement, formé du couple d'amortissement mécanique [1] (frottement du cadre dans l'air) et du couple de freinage électrique (freinage dû aux courants induits) dont nous avons [10] établi l'expression :

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d\Phi}{d\theta}\right)^2 \times \frac{d\theta}{dt},$$

$nBsi = Gi$, couple électromagnétique [14-11] dû à la décharge traversant le cadre, i désignant l'intensité $\frac{dq}{dt}$ à l'instant t.

[1] En raison des faibles vitesses, le couple d'amortissement mécanique (amortissement fluide) peut être considéré comme proportionnel à la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$.

L'équation générale du mouvement du cadre s'écrira en exprimant son équilibre dynamique :

Couple d'inertie = somme algébrique des couples agissants.

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = -a\theta - b\frac{d\theta}{dt} + G\frac{dq}{dt}$$

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + a\theta = G\frac{dq}{dt}.$$

Dans la *première phase*, l'équipage mobile, sans subir une rotation appréciable, acquiert une vitesse finie ω_0. C'est dire que, dans cette phase, θ est négligeable vis-à-vis de $\frac{d\theta}{dt}$. L'équation se réduit à :

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} = G\frac{dq}{dt},$$

ou, en intégrant :

$$J\frac{d\theta}{dt} + b\theta = Gq,$$

soit (θ négligeable) :

$$J\frac{d\theta}{dt} = Gq,$$

qui, intégrée de l'instant initial à l'instant t_1 de la fin de la décharge ($q = Q$), donne :

$$J\omega_0 = GQ,$$

Q, quantité d'électricité qui a traversé le cadre.

La vitesse angulaire ω_0 prise par le cadre à la fin de la décharge est donc proportionnelle à la quantité d'électricité Q de la décharge.

Dans la *deuxième phase*, le cadre, doué d'une vitesse angulaire initiale ω_0, va dévier librement. Nous obtiendrons la première amplitude θ_m en exprimant que l'énergie cinétique du cadre est entièrement convertie en énergie potentielle :

$$\frac{1}{2}J\omega_0^2 = \frac{1}{2}a\theta_m^2$$

D'où :

$$\theta_m = \omega_0\sqrt{\frac{J}{a}} = \frac{GQ}{J}\sqrt{\frac{J}{a}} = \frac{GQ}{\sqrt{Ja}}$$

On voit que *la première amplitude est proportionnelle à la quantité d'électricité Q qui, dans un temps très court, est passée dans le cadre.*

Il suffira donc, pour appliquer cet instrument à la mesure des quantités d'électricité déchargées dans un temps très court, de déterminer sa *constante*, c'est-à-dire le rapport $\frac{Q}{\theta_m}$.

Application à la mesure d'un flux. — Soit un galvanomètre balistique relié (fig. 28) à une bobine qui embrasse un flux Φ. Si ce flux varie, le courant i dans le galvanomètre, durant la période variable satisfait à l'équation :

$$-d\Phi_R/dt = Ri \qquad \begin{matrix} R = \text{résistance du circuit} \\ \Phi_R = \Phi + \varphi = \text{flux résultant} \end{matrix}$$

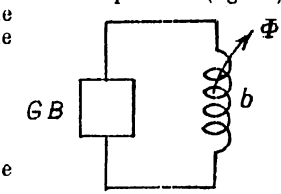


FIG. 6-28.

formé du flux Φ et du flux φ dû au courant induit i lui-même dans la bobine. On a donc :

$$-d\Phi/dt - d\varphi/dt = Ri$$

Comme le courant i *initial* est nul, ainsi que le courant i *final*, on a :

$$\int\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

Il reste :

$$\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} -\,d\Phi/dt = R\int i\,dt = RQ$$

soit :

$$\Phi_1 - \Phi_2 = RQ$$

Comme l'amplitude de la première oscillation permet de mesurer Q, la variation de flux peut s'en déduire si l'on connaît R.

FLUXMÈTRE. — Le cadre est suspendu par un fil de cocon dont la constante de torsion a est nulle. L'équation générale du mouvement du cadre se réduit à :

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} = G\frac{dq}{dt},$$

intégrée entre un instant antérieur à la décharge ($q = 0$) et l'instant où, la décharge terminée ($q = Q$), le cadre est arrêté $\left(\frac{d\theta}{dt} = 0\right)$ à sa nouvelle déviation permanente ($\theta = \theta_1$), cette équation devient $b\theta_1 = GQ$. Donc l'angle dont a tourné l'aiguille est proportionnel à la quantité d'électricité Q qui a rapidement traversé le cadre. Le fluxmètre, comme le galvanomètre balistique, permet donc la mesure de quantités d'électricité.

Mais en outre il permet la *mesure directe des flux*. En effet, il est construit de façon telle que l'amortissement mécanique soit négligeable devant l'amortissement électrique [1]. Dès lors la constante b est égale [10] à :

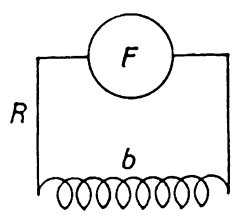


FIG. 6-29.

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d\Phi}{d\theta}\right)^2.$$

R = résistance de tout le circuit bobine-fluxmètre.

L'équation précédente s'écrit :

$$\frac{1}{R}\cdot\left(\frac{d\Phi}{d\theta}\right)^2 \times \theta_1 = GQ.$$

Mais si cette quantité d'électricité Q provient de la variation $\varphi_1 - \varphi_0$ du flux total embrassé par une bobine B (fig. 28), on a :

$$Q = \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{R}.$$

D'où :

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d\Phi}{d\theta}\right)^2 \times \theta_1 = \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{R}\cdot G$$

Nous avons montré [2-11] que, par construction, on a $d\Phi/d\theta = C^{te} = G =$ flux total embrassé par le cadre dans un champ uniforme d'induction B. Dès lors :

1° L'angle θ_1 balayé par le cadre au cours de sa rotation lorsque le flux total dans la bobine b varie de φ_0 à φ_1 *est proportionnel à* $\varphi_0 - \varphi_1$ et *indépendant de* R. D'où le nom de fluxmètre donné à l'appareil.

2° Le flux total $G\theta_1$ balayé par le cadre au cours de sa rotation est égal à la variation du flux total embrassé par la bobine b.

[1] Ce n'est qu'une question de construction et de constantes. Il faut, par exemple, pour conserver au couple d'amortissement électrique $\frac{1}{R}\left(\frac{d\Phi}{d\theta}\right)^2\cdot\frac{d\theta}{dt}$ une valeur suffisante, que la résistance R de l'appareil et du circuit ne soit pas trop grande.

COURANTS DE FOUCAULT DANS LES MASSES MÉTALLIQUES

16. **Définition et cause.** — Déplaçons dans un champ magnétique une masse métallique *M* (fig. 30) ou bien, laissant fixe celle-ci, faisons varier l'induction. La masse *M* peut être considérée comme constituée par une infinité de petits circuits tels que *C* et, dans un cas comme dans l'autre, ces circuits, embrassant un flux variable, sont parcourus par des courants induits. On les appelle courants *parasites* ou courants *de Foucault*. Leur forme est en général très compliquée et on ne la connaît que dans des cas particuliers. Étudions les caractéristiques et les effets de ces courants.

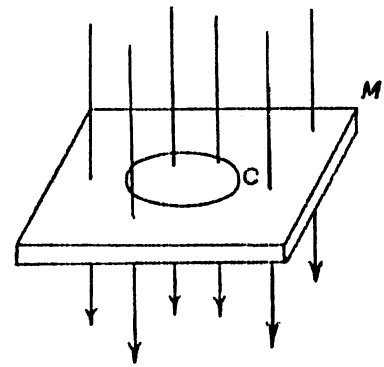


FIG. 6-30.

17. **Effet de freinage.** — En effet, comme tout courant induit, ils obéissent à la loi de Lenz, c'est-à-dire, s'ils sont produits par déplacement de la masse *M*, tendent à s'opposer à ce déplacement. On le montre à l'aide d'un disque tournant dont on réduit sensiblement la vitesse de rotation en approchant de celui-ci (fig. 31) un aimant permanent. Cet aimant produit en effet, par son champ, un couple de freinage proportionnel [10] à la vitesse de rotation du disque. Réciproquement, l'aimant NS tournant entraîne le disque dans sa rotation.

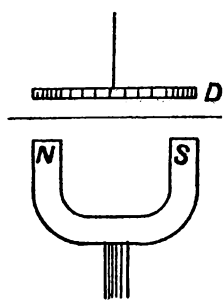


FIG. 6-31.

Le freinage *visqueux* [10] par courants de Foucault sert à l'amortissement de nombreux appareils de mesure où un disque d'aluminium, lié à l'équipage mobile, tourne entre les pôles d'un aimant. C'est, en particulier, le cas des compteurs électriques dont le rotor soumis :

à un couple moteur proportionnel à la puissance électrique ;

à un couple résistant (courants de Foucault) proportionnel à la vitesse;

tourne d'un angle (vitesse × temps) proportionnel à la puissance multipliée par le temps, c'est-à-dire à l'énergie dissipée dans le récepteur.

18. **Circulation dans des plans perpendiculaires aux lignes d'induction.** — C'est, en effet, dans ces plans que les circuits tels que *C* (fig. 30) embrassent le plus de flux et subissent au maximum l'effet de ses variations. On le montre en faisant tourner entre les pôles d'un électroaimant un cube formé de plaques d'aluminium (non magnétique) empilées et isolées les

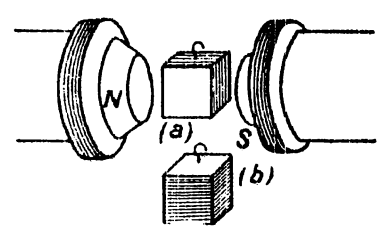


FIG. 6-32.

unes des autres : il y a freinage si les tôles ont la disposition de la figure 32 *a*, c'est-à-dire si les courants de Foucault sont engendrés dans le plan des plaques, au contraire avec la disposition de la figure 32 *b*, il n'y a pas de freinage, parce que les courants de Foucault, dans les plans où ils se développent, sont entravés par l'isolant interposé entre les plaques.

19. **Pertes d'énergie.** — En effet, à tous les circuits des courants de Foucault, s'applique la loi de Joule ; les courants de Foucault ont donc pour effet, par l'intermédiaire de l'énergie électrique, de faire passer de l'énergie sous forme calorifique. Cette chaleur produite dans la masse métallique échauffe celle-ci et n'est utilisée que dans les fours à haute fréquence : c'est généralement une perte d'énergie.

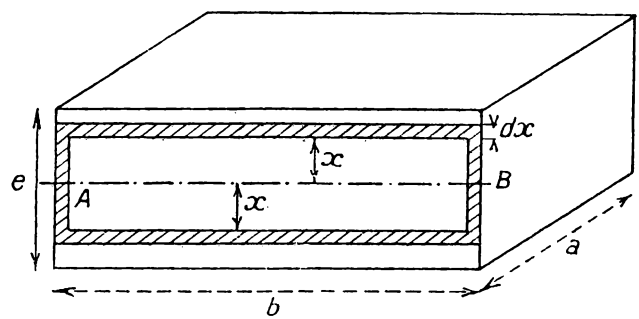


FIG. 6-33.

Dans le cas — le plus fréquent dans la pratique — où des tôles subissent, à la fréquence f, des variations d'induction entre $+ B_m$, $- B_m$ et $+ B_m$, il est facile d'obtenir l'expression de la perte d'énergie en supposant d'une part que B varie suivant une loi sinusoïdale ($B = B_m \sin \omega t$), d'autre part que B est la même dans toute la section de la tôle.

Considérons (fig. 33) deux tranches d'épaisseur dx à la distance x de la médiane AB de part et d'autre de celle-ci. Elles forment les côtés horizontaux d'une spire rectangulaire qui se ferme verticalement aux deux extrémités. Désignons par a la profondeur de cette spire.

Flux à travers la surface de cette spire :

$$\Phi = BS = B_m \sin \omega t \times b \times 2x$$

F. É. M. induite dans la spire hachurée :

$$e = d\Phi/dt = B_m \omega \cos \omega t \times 2bx.$$

Résistance de la spire hachurée :

$$R = \rho \frac{2b + 2x}{a \times dx} \simeq \rho \frac{2b}{a \times dx} \quad \text{(en négligeant } 2x \text{ devant } 2b\text{)}.$$

Puissance perdue dans la spire (1) :

$$dP = E_{eff}^2/R = \frac{1}{2} E_m^2/R = \frac{1}{2R} B_m^2\omega^2 \times 4b^2x^2 = \frac{1}{2} \frac{a\,dx}{\rho \times 2b} B_m^2\omega^2 \times 4b^2x^2$$

$$dP = \frac{1}{\rho} B_m^2\omega^2 bax^2\,dx$$

$$P = \int_0^{e/2} dP = \frac{1}{\rho} B_m^2\omega^2 ba \int_0^{e/2} x^2\,dx = \frac{1}{\rho} B_m^2\omega^2 ba \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{e/2}$$

Soit, en remplaçant par $2\pi f$ la pulsation ω :

$$P = \frac{1}{\rho} B_m^2 \times 4\pi^2 f^2 \times ba \frac{e^3}{24} = \frac{1}{\rho} B_m^2 \times 4\pi^2 f^2 \times bae \times \frac{e^2}{24}$$

et en remarquant que le volume de la tôle est : bae :

$$\underset{\text{watts/m}^3}{P} = \frac{\pi^2}{6\rho} \underset{\text{m}}{e^2} \underset{\text{T}}{B_m^2} \underset{\text{Hz}}{f^2}$$

Les facteurs e et ρ intéressent le *constructeur* : avantage marqué à réduire l'épaisseur des tôles et à employer des tôles de haute résistivité. Les facteurs B_m et f intéressent l'exploitant.

20. **Effet de peau magnétique.** — DÉFINITION. — C'est un phénomène lié au précédent et suivant lequel une induction magnétique B *constante* ne pénètre que progressivement vers l'axe d'un noyau magnétique et une induction magnétique *alternative* se localise dans une couche de peau (comme une densité de courant dans l'effet de peau électrique).

EXPLICATION. — Soit une bobine dont nous figurons seulement une spire dans le plan de la figure 34. Cette bobine comporte un noyau cylindrique représenté en coupe. Mettons brusquement la bobine sous tension continue de façon telle que le courant dans la bobine croisse aussi rapidement que possible [7-16] de zéro à I.

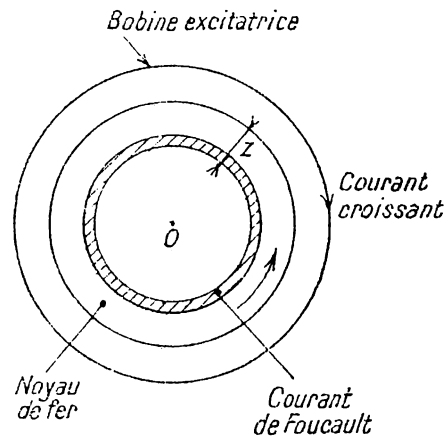


FIG. 6-34.

L'induction axiale B croissant dans le noyau engendre dans celui-ci des courants de Foucault circulaires centrés sur l'axe du noyau. La F. M. M due à ces courants s'oppose à la

(1) $E_{eff} = E_m/\sqrt{2}$.

F. M. M. de la bobine. Dès lors la *F. M. M. résultante* en un point situé à la profondeur z (distance à la surface du noyau) *est d'autant plus faible que z est plus grand.*

Donc tant qu'il y a des courants de Foucault, c'est-à-dire tant que le courant dans la bobine croît, H (et par suite B) sont plus petits suivant l'axe du noyau qu'à sa surface. L'induction B pénètre progressivement dans le noyau, même si le courant dans la bobine croît brusquement de zéro à I.

Les figures 35 montrent comment B se répartit dans le fer aux différents instants lorsque l'induction B est brusquement appliquée ou supprimée.

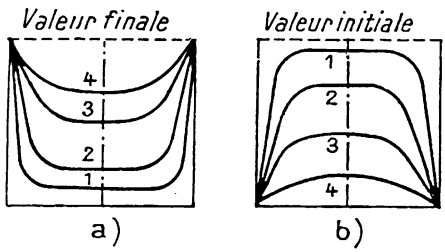


FIG. 6-35.
a) Mise sous tension.
b) Ouverture du circuit.

ÉPAISSEUR DE PÉNÉTRATION OU COUCHE DE PEAU. — On démontre que la loi de pénétration du champ H est la même que la loi de la pénétration de la densité de courant.

$$H_x = H_0\, e^{-x/x_0} \text{ avec } x_0 = \sqrt{\frac{\rho}{\pi\mu f}}$$

(x_0 = épaisseur de la coque fictive magnétique).

CONSÉQUENCES ET APPLICATIONS. — Lorsque l'induction magnétisante appliquée à un barreau est alternative, le flux doit croître de zéro à son maximum en 1/4 de cycle et ce temps (même à $f = 50$ Hz) est très inférieur à celui qui serait nécessaire pour que le flux s'établisse dans toute l'épaisseur, même si celle-ci n'est que de quelques centimètres.

Par exemple, dans le fer avec une épaisseur de tôle

$$e < 3{,}75\sqrt{f}, \text{ on a } B \text{ (au centre)} < 0{,}02\ B \text{ (à la surface)}.$$
mm

C'est l'une des raisons pour lesquelles l'épaisseur des tôles, dans les machines à courant alternatif, ne doit pas dépasser 0,4 mm.

L'application est le *blindage contre les champs électromagnétiques en haute fréquence.* On peut soustraire un appareil à l'action d'un champ électromagnétique à haute fréquence en l'enfermant dans une boîte métallique d'épaisseur suffisante.

Par exemple un blindage d'aluminium ($\rho = 3\ \mu\Omega$ cm $= 3 \times 10^{-8}$ *SI*) destiné à protéger, dans un récepteur radioélectrique, un tube contre une induction magnétique variant à la fréquence 10^6 Hz devra avoir au minimum, si on veut affaiblir 1 000 fois cette induction, une épaisseur x telle que :

$$\ln \frac{B_0}{B} = \frac{x}{x_0} \qquad \text{ou} \qquad 2{,}3 \times 3 = \frac{x}{x_0}$$

$$x = 6{,}9\, x_0 \simeq 7x_0 = 7\sqrt{\frac{3 \times 10^{-8}}{\pi \times 4\pi \times 10^{-7} \times 10^6}} = 6 \times 10^{-4} \text{ m, soit } 0{,}6 \text{ mm}.$$

Remarquons que si l'on a $\rho = 0$ (métal supraconducteur), l'épaisseur de la coque fictive est nulle. C'est dire qu'aucune induction magnétique ne peut pénétrer dans un supraconducteur. Il constitue un écran électromagnétique parfait.

21. **Conséquence : feuilletage des circuits magnétiques à induction variable.** — Le plus souvent, les courants de Foucault sont nuisibles, car les pertes d'énergie qu'ils causent diminuent le rendement des machines et parfois provoquent un échauffement dangereux des pièces dans lesquelles ils se produisent. D'où la nécessité des précautions que voici :

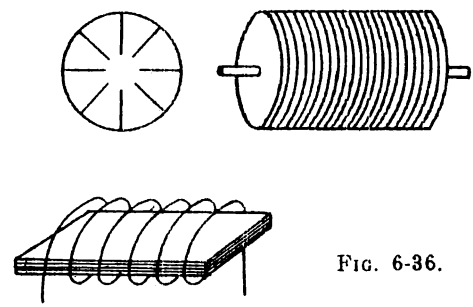


FIG. 6-36.

a) *Feuilletage de toute masse métallique soumise à des variations d'induction.* — Toutes les masses métalliques soumises à des variations d'induction doivent être *feuilletées* (c'est-à-dire formées d'empilages de tôles isolées entre elles) dans des plans *parallèles aux lignes d'induction.* C'est ainsi, en effet, que l'on coupe le parcours des courants de Foucault engendrés dans des plans perpendiculaires aux flux. La figure 36 montre, par exemple, le feuilletage d'un induit de machine tournante et d'un noyau de transformateur.

b) *Précautions pour éviter des circuits fermés dans des flux variables.* — Les rivets et les vis assemblant les tôles ne doivent pas fermer des

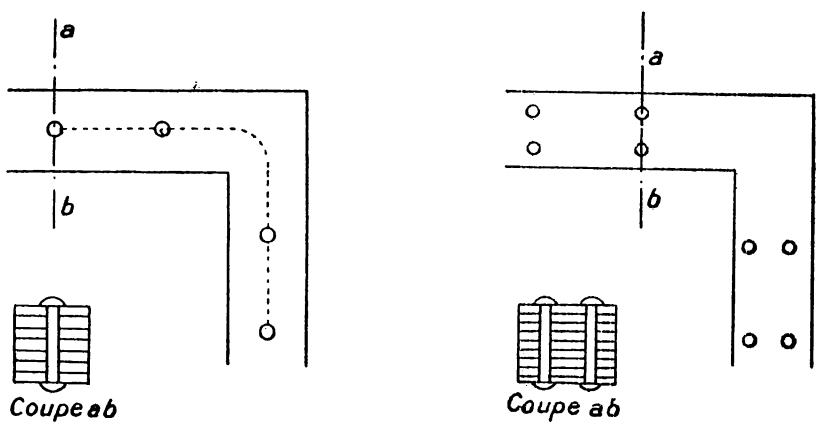


FIG. 6-37.

circuits conducteurs embrassant un flux variable. Les figures 37 montrent à cet égard la bonne et la mauvaise disposition des rivets qui servent à l'assemblage des tôles d'un circuit magnétique parcouru par un flux alternatif (transformateur, bobine d'autoinduction, etc.).

Il faut enfin couper par une incision parallèle aux lignes d'induction

les supports métalliques des bobines ou bien les constituer par une substance non conductrice.

22. **Le paradoxe des conducteurs dans les encoches.** — Dans les machines tournantes, les conducteurs sont placés dans des encoches. Presque noyés dans le fer (écran magnétique), il semble que, soumis à une faible induction B, les F. É. M. dont ils sont le siège (générateurs), les forces de Laplace auxquels ils sont soumis (moteurs) doivent être beaucoup plus faibles.

Or l'expérience démontre le contraire : F. É. M. et forces de Laplace sont *les mêmes* qu'en dehors des encoches. On peut en donner l'explication que voici.

Force électromotrice induite (*Blv*). Dans l'encoche, B est faible mais v

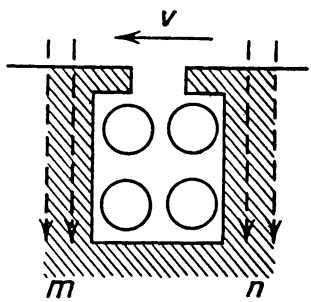


FIG. 6-38.

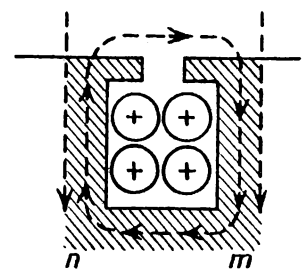


FIG. 6-39.

est très grand, car les lignes d'induction sautent très brusquement d'un bord m de l'encoche à l'autre bord n (fig. 38).

Force électromagnétique de Laplace (*Bli*). L'induction B est faible mais les lignes d'induction qui, dans le fer, entourent le conducteur ont pour effet d'accroître fortement B d'un côté m et de le diminuer fortement de l'autre côté n de l'encoche. Or nous avons montré que la force de Laplace déplace le conducteur parcouru par un courant *vers la zone des B faibles*. Cette force est d'autant plus grande que les différences des valeurs de B des deux côtés sont plus importantes.

Tout se passe comme si les forces électromagnétiques étaient appliquées au fer, ce qui est avantageux car le fer est plus solide que les fils isolés des enroulements. La construction des machines au point de vue mécanique, s'en trouve facilitée.

CHAPITRE 7

AUTOINDUCTION. INDUCTION MUTUELLE SYSTÈMES D'UNITÉS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

F. É. M. D'AUTOINDUCTION. INDUCTANCE

1. Une bobine parcourue par un courant variable est le siège d'une F. É. M. d'autoinduction. — Une bobine (fig. 1) traversée par un courant i crée une induction B et embrasse un flux d'induction Φ. Si le courant i est variable, le flux embrassé Φ l'est aussi. D'où création dans la bobine d'une F. É. M. d'induction ; comme elle est due à la variation du flux engendré par la bobine elle-même, comme elle constitue une sorte de réaction de la bobine sur elle-même, on lui donne le nom de *F. É. M. d'autoinduction.*

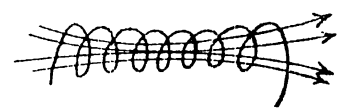


FIG. 7-1.

2. La F.É. M. d'autoinduction s'oppose à un courant qui croît, prolonge un courant qui décroît. — En vertu de la loi de Lenz [6-5], la F.É.M. d'autoinduction doit s'opposer à la cause qui la produit ; cette cause est ici la variation du courant i ; elle aura donc toujours un sens tel qu'elle tende à s'opposer à cette variation. Il en résulte que :

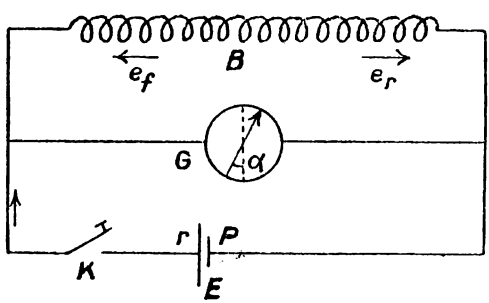


FIG. 7-2.

1° Lorsque l'intensité du courant dans la bobine *diminue*, la F. É. M. d'autoinduction est de *même sens* que le courant ; la bobine fonctionne comme génératrice.

2° Lorsque l'intensité du courant dans la bobine *augmente*, la F. É. M. d'autoinduction est de *sens contraire* au courant ; la bobine fonctionne comme réceptrice.

Il est facile de vérifier l'existence et le sens de la F. É. M. d'autoinduction en employant le dispositif de Faraday (fig. 2).

Une bobine B aux extrémités de laquelle est connecté un galvanomètre G est soumise à l'action d'un générateur P par le jeu d'un interrupteur K.

a) On ferme l'interrupteur. Lorsque le galvanomètre a pris sa déviation permanente α, on place contre son aiguille une petite cale empêchant le retour au zéro. On ouvre l'interrupteur. On le referme ensuite. On constate alors que l'aiguille reçoit une impulsion tendant à accentuer sa déviation α ; cette impulsion est l'indice d'une F. É. M. d'autoinduction e_f de sens opposé au courant lancé dans la bobine [1].

b) On place la cale de façon que, le galvanomètre étant traversé par le courant permanent, son aiguille demeure au zéro. On ouvre l'interrupteur K. L'aiguille subit alors une impulsion de sens contraire à sa déviation de régime permanent ; la F. É. M. d'autoinduction e_r à la rupture était donc le sens indiqué (fig. 2), c'est-à-dire tendant à prolonger le courant dans la bobine.

3. **Inductance d'une bobine sans fer.** — Nous avons montré [1-16] qu'en chaque point de l'espace, l'induction B d'une bobine sans fer (sans métal magnétique) et parcourue par un courant I, a pour expression :

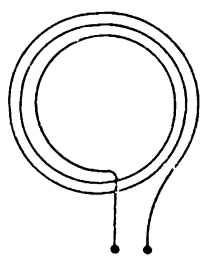


FIG. 7-3.

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\Omega}{dn} \text{ [2]},$$

elle est donc proportionnelle au courant I. Il en est de même du flux Φ engendré par la bobine et embrassé par elle. Nous pouvons donc écrire :

$$\Phi = LI,$$

L désignant un coefficient constant. On l'appelle coefficient d'autoinduction ou autoinductance ou inductance propre ou plus simplement *inductance* de la bobine.

REMARQUE I. — Nous avons désigné par Φ le flux *total engendré et embrassé* par le circuit parce que :

a) Un circuit peut n'être traversé que par une fraction du flux qu'il engendre. Par exemple, dans une bobine épaisse (fig. 3), les spires intérieures n'embrassent qu'une fraction du flux créé par les spires extérieures.

b) Un circuit peut embrasser un flux supérieur à celui qu'il engendre. S'il est traversé par un flux étranger et variable, ce dernier crée une F. É. M. d'induction qui doit être distinguée de la F. É. M. d'autoinduction due aux variations du flux propre du circuit.

[1] En effet, par suite de cette F. É. M. opposée, la source, à la fermeture, fournit un courant plus faible que le courant en régime établi et sa tension aux bornes ($U = E - rI$) est plus grande.

[2] Dérivée prise dans la direction du vecteur $\vec{H}$.

REMARQUE II. — Un coefficient d'autoinduction est toujours positif. En effet, en vertu des conventions de signes déjà faites (fig. 6-16) :
à un courant positif correspond un flux positif ;
à un courant négatif correspond un flux négatif.

4. **Inductance d'une bobine avec noyau de fer.** — Quand le circuit magnétique de la bobine contient du fer (ou une substance magnétique), la réluctance $\mathcal{R}$ de son circuit magnétique contient des termes qui varient avec B, donc avec le courant.

a) Si l'entrefer est relativement grand (1), la réluctance constante de l'entrefer l'emporte et le flux est encore sensiblement proportionnel au courant. L'inductance L est pratiquement constante.

b) Il en est de même lorsque, l'entrefer étant très faible ou même nul, le fer se trouve maintenu dans un intervalle convenable d'induction. Par exemple, avant la saturation (fig. 4), la courbe de magnétisation du circuit magnétique de la bobine montre que le flux est pratiquement proportionnel au courant.

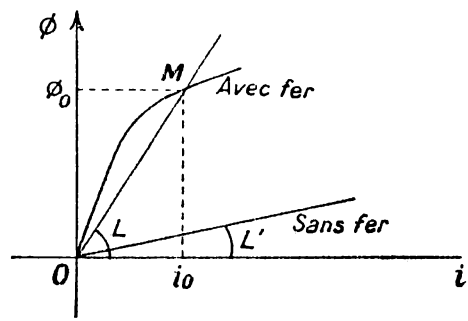


FIG. 7-4.

c) Il n'en est plus ainsi lorsque le coude de la courbe de magnétisation est atteint. La figure 4 montre qu'à ce moment l'inductance L décroît sensiblement lorsque le courant dans la bobine augmente.

Dans les cas *a* et *b*, on considère, dans les calculs, L comme constant. L'approximation que l'on commet ainsi n'est pas plus grossière que celles des calculs relatifs aux circuits magnétiques. Mais il est bon de savoir que cette approximation est *inadmissible* quand le fer est *aimanté à saturation* et quand l'*hystérésis est importante.*

Quand on veut à la fois une inductance grande et constante, on emploie (c'est le cas dans les circuits de haute fréquence) des bobines dont les noyaux sont en poudre magnétique (fer pur finement pulvérisé puis aggloméré sous pression avec un liant isolant). La perméabilité relative est constante et de l'ordre de 50.

5. **Expression de la F. É. M. d'autoinduction.** — Considérons un circuit électrique dont le flux total engendré et embrassé varie entre Φ et $\Phi + d\Phi$ lorsque le courant varie entre i et $i + di$. Il est le siège d'une F. É. M. d'autoinduction :

$$e_a = -\frac{d\Phi}{dt}$$

ou, en remplaçant $d\Phi$ par $L\,di$:

$$e_a = -L\frac{di}{dt}$$

(L = inductance correspondant au courant i) ;
telle est l'expression de la F. É. M. d'autoinduction.

(1) C'est le cas des bobines à noyau droit.

6. **Unité *SI* d'inductance. Henry.** — L'unité *SI* d'inductance peut se définir :

a) Soit par la formule $\Phi = LI$: l'inductance d'un circuit qui, parcouru par un courant de 1 A, engendre et embrasse un flux total de 1 weber.

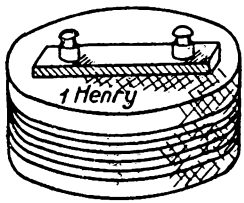


FIG. 7-5.

b) Soit par la formule $e_a = -L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$: l'inductance d'un circuit qui, parcouru par un courant variant de 1 A/s, est le siège d'une F. É. M. de 1 volt.

Cette unité est le *henry* [1].

Le henry constitue une inductance facilement réalisable. On construit des séries de bobines étalonnées (fig. 5) dont les inductances varient de 0,01 à 10 H. Lorsqu'une bobine comporte un noyau de fer, son inductance atteint facilement plusieurs henrys.

7. **Formules de quelques inductances remarquables.** — Nous avons montré que, lorsqu'un circuit électrique est placé dans un milieu *à perméabilité constante*, son inductance a une valeur constante (indépendante du courant). Cette valeur ne dépend que des paramètres géométriques qui définissent le circuit puisque la répartition topographique de H et de B ne dépend que de ces paramètres.

Mais, même dans ce cas, il est généralement impossible d'obtenir, à partir des dimensions du circuit, l'expression de son inductance. Cela tient au fait que la répartition topographique de B est difficile à connaître, d'où l'impossibilité d'exprimer le flux d'induction correspondant.

C'est seulement dans les cas particuliers ci-après, où l'induction est sensiblement uniforme dans la portion d'espace embrassée par le circuit, que l'inductance de celui-ci a une expression simple.

1° *Inductance d'un électroaimant* (fig. 6). — Nous l'exprimerons par le flux total produit par le courant unité. La formule d'Hopkinson [17-14] donne :

$$n \times 1 = \mathcal{R}\Phi,$$

$\mathcal{R}$ désignant la réluctance du circuit magnétique. D'où :

$$L = n\Phi = \frac{n^2}{\mathcal{R}}.$$

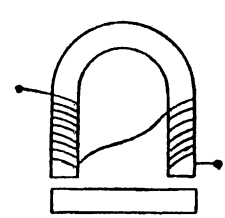


FIG. 7-6.

2° *Inductance d'un tore électromagnétique* (fig. 7). — C'est un cas particulier d'électroaimant dans lequel on a :

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu s};$$

[1] Ancienne unité (*EMCGS*), le centimètre : 1 henry = 10^9 centimètres.

l = longueur de la ligne de force moyenne
s = section ;
μ = perméabilité absolue,

$$L = \frac{n^2}{\frac{l}{\mu s}} \quad \text{soit} \quad \boxed{L = \mu n^2 s/l}$$

cette expression est importante parce qu'elle s'applique aussi bien à une bobine longue. Nous avons montré en effet qu'une telle bobine produit la même induction B, donc engendre, à section égale, le même flux qu'un tore électromagnétique ayant le même nombre de spires par mètre.

Nous exposerons plus loin [15] les méthodes permettant le calcul d'autres inductances remarquables.

On peut appliquer cette formule à une bobine enroulée sur un cadre de forme quelconque. Les résultats obtenus sont d'autant plus éloignés de la réalité que la partie du circuit magnétique recouverte par le fil est plus réduite et que ce circuit magnétique est plus réluctant.

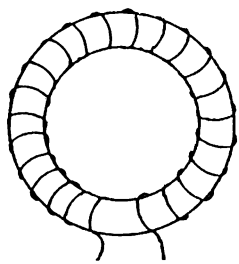


FIG. 7-7.

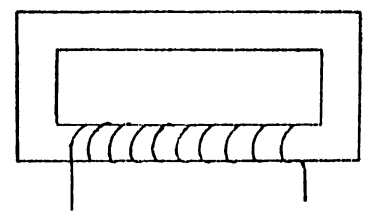


FIG. 7-8.

Nous retiendrons que, pour toute bobine, l'autoinductance est proportionnelle à la surface de chaque spire, au *carré* du nombre de spires et à la *perméabilité du noyau*. Comme celle-ci peut atteindre des valeurs très élevées, on réalise des bobines de grande inductance en leur donnant de nombreuses spires et un noyau magnétique de grande perméabilité.

Cela montre l'intérêt des bobines dont le noyau est en poudre magnétique. Elles ont une inductance assez élevée avec un nombre de spires relativement faible, ce qui réduit leur dimension et leur résistance (gros avantage en haute fréquence). Leurs pertes par courants de Foucault sont faibles.

Mais il est essentiel de noter que :

a) La perméabilité μ qui intervient dans cette formule est la perméabilité *absolue apparente* définie plus haut [3-22].

b) Même en montant une bobine sur un circuit magnétique fermé (sauf si ce circuit et la bobine sont toriques), on ne doit pas multiplier L par μ. C'est parce que l'espace offert au flux dans le fer est plus restreint que dans l'air. Pour que l'inductance L fût multipliée par μ, il faudrait que le fer remplît tout le volume occupé initialement par le champ magnétique, ce qui n'est vrai que dans le cas très particulier sus-indiqué.

c) Dès que le fer se sature, μ ainsi que L décroissent très rapidement. C'est pourquoi on ne se sert jamais de bobinages à fer dans les mesures de quelque précision.

8. **La perméabilité magnétique est, dans le système *SI*, égale à l'inductance linéique.** — De la formule du tore électromagnétique ou de la bobine très longue :

$$L = \mu n^2 s/l$$

nous tirons :

$$L/l = \mu \left(\frac{n}{l}\right)^2 s$$

avec $l = 1$ m ; $n = 1$; $s = 1$ m^2, nous avons :

$$L/l = \mu.$$

La perméabilité μ d'un milieu n'est autre qu'une *inductance linéique*, c'est-à-dire l'inductance d'une portion de 1 mètre d'une bobine longue de section 1 m^2.

C'est pourquoi une perméabilité absolue (en particulier la perméabilité μ_0 du vide) s'exprime, dans le système *SI*, en *henrys par mètre* (symbole H/m).

9. **Relation entre ε_0, μ_0 et la vitesse de la lumière.** — Considérons un conducteur infiniment long constitué par deux bandes métalliques planes, parallèles, de largeur b (m) relativement grande, écartées à une faible distance d (m) l'une de l'autre et placées dans le vide (fig. 9). Leur résistance est supposée négligeable.

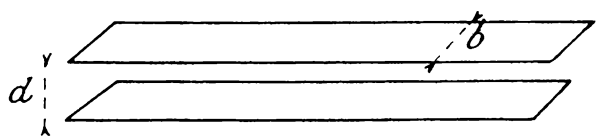


FIG. 7-9.

Relions le commencement des deux conducteurs à une source de tension continue U. Les conducteurs ne sont pas instantanément soumis à cette tension sur toute leur longueur. En effet soit C' (F/m), la capacité entre les conducteurs par mètre de longueur et L' (H/m), l'inductance par unité de longueur des bandes constituées par les deux conducteurs.

Si la tension (autrement dit le champ électrique entre les conducteurs) se propage avec la vitesse v, on a :

Variation de charge du système dans l'unité de temps : $U \times C'v$.

Courant I dans le conducteur jusqu'au point chargé $I = U \times C'v$.

Flux magnétique jusqu'à ce point à la distance x : $\Phi = I \times L'x$.

F. C. É. M. correspondante

$$e = IL' \frac{dx}{dt} = IL'v.$$

Cette F. C. É. M. est à tout instant égale à U (résistance nulle). Donc :

$$IL'v = U = \frac{I}{C'v} \qquad \text{d'où} \qquad v^2 = \frac{1}{L'C'}.$$

Quand b est très grand par rapport à d les champs électrique et magnétique entre les conducteurs deviennent uniformes et l'on a :

$$C' = \varepsilon_0 \frac{b}{d} \qquad L' = \mu_0 \frac{d}{b} \ (1)$$

Donc enfin :

$$v^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}.$$

Cette vitesse v ayant été mesurée et trouvée égale à celle de la lumière c on a :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

10. **Généralité de la loi d'Ohm.** — La loi d'Ohm est d'une remarquable généralité. On la trouve dans les trois grands domaines *électrostatique*, *électrocinétique*, *magnétique*.

C'est ce que nous faisons apparaître dans le tableau suivant :

Courant électrique	Flux électrique	Flux magnétique

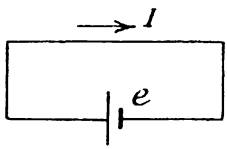
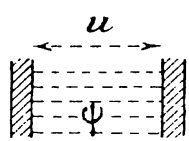
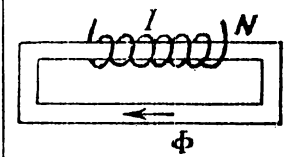

		

Fig. 7-10.	Fig. 7-11.	Fig. 7-12.
$I = \frac{e}{R}$	$\Psi = \frac{U}{R_d}$	$\Phi = \frac{F}{\mathcal{R}}$
Force électromotrice e (V)	D. D. P. électrique U (V)	Force magnétomotrice F (A)
Résistance R (Ω) :	Résistance diélectrique R_d :	Réluctance $\mathcal{R}$:
$R = \frac{e}{I} = \rho \frac{l}{s} = \frac{l}{\gamma s}$	$R_d = \frac{U}{\Psi} = \frac{1}{C} = \rho_d \frac{l}{s} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{l}{s}$	$\mathcal{R} = \frac{F}{\Phi} = \rho_m \frac{l}{s} = \frac{1}{\mu} \frac{l}{s}$
γ = Conductivité (siemens m/m²)	Permittivité absolue ε (F/m)	Perméabilité absolue μ (H/m).
Résistivité ρ (Ω-m²/m) :	Résistivité diélectrique ρ_d :	Résistivité magnétique ρ_m :
$I = Ge$ $J = \gamma E$	$\Psi = CU$ $D = \varepsilon E$	$\Phi = LI$ $B = \mu H$
Champ électrique E (V/m) Densité de courant J (A/m²)	Champ électrique E (V/m) Induction électrique D	Champ magnétique H (A/m) Induction magnétique B (T)

(1) En effet on a $\Phi = B \times d \times 1 = \mu_0 j \times d \times 1 = \mu_0 \frac{I}{b} \times d$ et $L' = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \frac{d}{b}$.

ÉNERGIE ÉLECTROCINÉTIQUE

11. Une inductance parcourue par un courant I possède une énergie électromagnétique $\frac{1}{2} LI^2$. — Nous avons vu [2] que la F. É. M. d'autoinduction d'une bobine a un sens tel que :

a) Lorsque le courant croît, elle joue le rôle de *force contre-électromotrice* ; la bobine fonctionne alors comme un *récepteur.*

b) Lorsque le courant décroît, elle joue le rôle de *force électromotrice ;* la bobine fonctionne comme *générateur.*

Nous en conclurons qu'au moment de la croissance du courant, une fraction de l'énergie électrique fournie à la bobine passe sous une forme autre que la forme calorifique et qu'au cours de la décroissance, le phénomène inverse se produit. Dès lors, la bobine nous apparaît comme un *réservoir d'énergie* qui se remplit quand elle est traversée par un courant croissant, qui se vide quand elle est parcourue par un courant décroissant. Quelle est l'expression de cette énergie ? De quelle nature est-elle ?

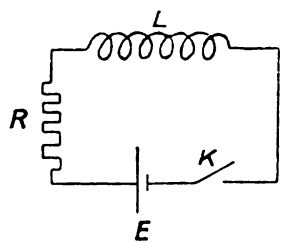


FIG. 7-13.

1° *Expression.* — Soit un circuit électrique (fig. 13) d'inductance L constante et résistance R, comportant un générateur de F. É. M. constante E. Quand on ferme l'interrupteur K, le courant, par suite de l'existence de la F. É. M. d'autoinduction, ne s'établit pas instantanément dans le circuit. Désignons, pendant la croissance du courant, par i son intensité à l'instant t et $i + \mathrm{d}i$ à l'instant $t + \mathrm{d}t$.

La loi d'Ohm généralisée, appliquée à ce circuit à l'instant t, donne :

$$E - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Ri$$

ou :

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E.$$

Multiplions les deux membres par $i\,\mathrm{d}t$.

$$Li\,\mathrm{d}i + Ri^2\,\mathrm{d}t = Ei\,\mathrm{d}t.$$

Il apparaît que l'énergie électrique $Ei\,\mathrm{d}t$ apportée par la source pendant le temps $\mathrm{d}t$ devient :

a) D'une part $Ri^2\,\mathrm{d}t$ passée sous forme de chaleur (effet Joule).

b) D'autre part $Li\,\mathrm{d}i$. Si le courant est dans sa phase croissante (phase d'établissement), cette énergie est absorbée par le circuit pendant le temps $\mathrm{d}t$.

Si le courant varie de zéro à i_0, l'énergie totale absorbée sera :

$$W = \int_0^{i_0} Li \, di = \frac{1}{2} L i_0^2 ;$$

nous l'écrirons en unités correspondantes :

$$\underset{\text{joules}}{W} = \frac{1}{2} \quad \underset{\text{henrys}}{L} \quad \underset{\text{ampères}}{I^2}$$

12. **Nature de cette énergie.** — Supposons que le circuit considéré soit un tore électromagnétique de n spires, dont la circonférence moyenne a pour longueur l. L'énergie emmagasinée pendant le temps dt est :

$$i \, d\Phi = id(n\varphi) = ni \, d\varphi \qquad (\Phi = n\varphi)$$

et par unité de volume du noyau de section s :

$$\frac{ni \, d\varphi}{sl} = \frac{ni}{l} \times \frac{d\varphi}{s} = \frac{ni}{l} dB = H \, dB$$

Quand le courant dans la bobine sera égal à I, l'énergie totale emmagasinée par unité de volume est :

$$W = \frac{1}{2} \frac{LI^2}{sl} = \frac{1}{2} \frac{LI \times I}{sl} = \frac{1}{2} \frac{n\varphi I}{sl} = \frac{1}{2} \frac{nI}{l} \cdot \frac{\varphi}{s} = \frac{1}{2} HB$$

1° L'énergie absorbée pendant la croissance du courant et restituée pendant la décroissance s'exprime en fonction de grandeurs magnétiques : elle est donc, pendant la phase de croissance du courant, emmagasinée dans son champ magnétique. *Un champ magnétique est un réservoir d'énergie.*

2° Dans le tore électromagnétique, B et H sont nuls à l'extérieur de celui-ci ; l'unité de volume du noyau est aussi bien l'unité de volume du champ (d'ailleurs uniforme). L'expression W représente donc bien l'énergie par unité de volume (ou densité d'énergie) du champ :

$$\underset{\text{J/m}^3}{W} = \frac{1}{2} \quad \underset{\text{T}}{B} \quad \underset{\text{A/m}}{H}$$

13. **Énergie perdue par hystérésis.** — Considérons le tore électromagnétique (fig. 3-14) au cours de la croissance du courant de 0 à I_m. Si le noyau n'était pas préalablement désaimanté, le point figuratif de

l'état du noyau décrit la courbe de la figure 14. L'énergie électrocinétique emmagasinée dans le noyau pendant cette phase est :

$$W_1 = \int_{-B_1}^{B_2} H \, dB \qquad \text{(absorbée et positive, car } H > 0 \text{ et } dB > 0)$$

elle est représentée par l'aire A (fig. 14).

Quand le courant décroît de I_m à zéro, l'énergie restituée (négative puisqu'on a $H > 0$ et $dB < 0$) est représentée par l'aire A' de la figure 15.

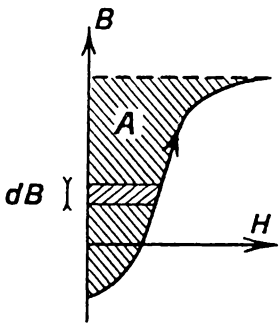


FIG. 7-14 (3).

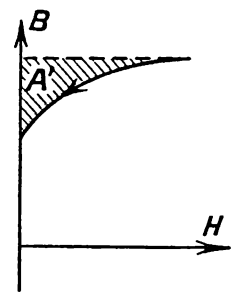


FIG. 7-15.

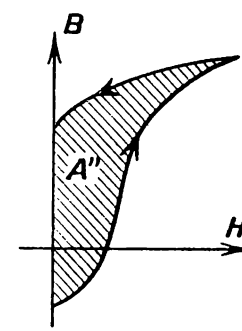


FIG. 7-16.

En définitive, quand le courant a varié de zéro à I_m puis de I_m à zéro, l'énergie perdue (absorbée et non restituée) par hystérésis est représentée par l'aire A'' (fig. 16). Évidemment, si on avait fait parcourir au noyau non plus un 1/2 cycle mais un *cycle complet*, l'énergie perdue par hystérésis aurait été représentée par l'*aire de ce cycle.*

Cette aire doit être évaluée en joules en prenant pour unité de surface le rectangle construit sur les longueurs qui représentent respectivement 1 ampère par mètre et 1 tesla (1).

13 *bis.* **Formule empirique de l'énergie perdue par hystérésis.** — Pour utiliser l'expression précédente de l'énergie perdue par cycle correspondant à différentes valeurs de B_m, il serait nécessaire de relever le cycle pour chaque valeur de B_m (opération longue et fastidieuse).

C'est pourquoi on a cherché une formule *empirique* qui, pour un matériau déterminé, donne la perte d'énergie par mètre cube et par cycle en fonction de B_m. Avec les tôles actuelles et pour des inductions de l'ordre de 1 T, on peut employer la suivante :

$$W = \eta B_m^2 \qquad \eta = \text{coefficient caractéristique du matériau (2)}$$

que l'on écrit, lorsque la fréquence des cycles est exprimée en hertz :

$$P_H \text{ (perte de puissance par m}^3) = \underset{\text{Hz T}}{\eta f B_m^2}.$$

(1) Pour un fer doux ordinaire, W est de l'ordre de 100 à 150 joules.

(2) Ce coefficient dit « hystérétique » varie de 120 à 380 suivant la proportion de silicium dans les tôles.

(3) Les deux ordonnées limites sont, pour la courbe, B_1 et B_2.

14. Un courant électrique dans une inductance est doué d'inertie. — Considérons un dispositif constitué par quatre petites poulies (fig. 17) sur lesquelles est tendu un fil capable, par quelques spires enroulées, de faire tourner un système rotatif constitué par un moyeu de bicyclette auquel sont liées, par une tige transversale, deux masses M.

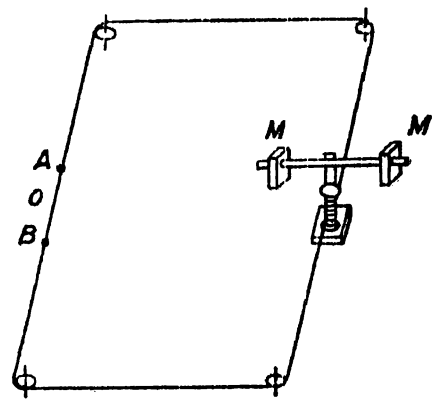


FIG. 7-17.

Quand, en tirant sur le fil, nous mettons l'ensemble en mouvement, le système rotatif, formant volant, est soumis à un couple moteur Γ_m et à un couple résistant Γ_r. Si les frottements solides sont négligeables devant les forces de frottement fluide dues à la résistance opposée par l'air au mouvement des masses M, ce couple résistant peut être considéré comme proportionnel à la vitesse de rotation ω du système rotatif :

$$\Gamma_r = f\omega,$$

f = coefficient de frottement fluide.

L'équation du mouvement du volant sera donc :

$$J\frac{d\omega}{dt} + f\omega = \Gamma_m$$

(J = moment d'inertie du volant), équation qui offre une frappante analogie avec la suivante :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E$$

qui exprime la loi d'Ohm généralisée appliquée à un circuit électrique doué d'autoinductance. En poussant plus avant la comparaison, nous sommes conduits aux analogies mises en évidence par le tableau ci-dessous :

Coefficient d'autoinduction L.	Moment d'inertie J.
Résistance R.	Coefficient de frottement f.
Chute par résistance Ri.	Couple résistant $f\omega$.
Perte de puissance Ri^2.	Puissance transformée en chaleur $f\omega^2$.
Énergie électromagnétique $\frac{1}{2}Li^2$.	Énergie cinétique $\frac{1}{2}J\omega^2$.

Cette dernière analogie explique le nom d'énergie *électrocinétique* donné parfois à l'énergie électromagnétique $\frac{1}{2}Li^2$ d'un circuit doué d'inductance.

En définitive, dans un circuit doué d'autoinductance, tout se passe comme si le courant électrique — représenté par le déplacement du fil

tendu — était doué d'inertie, comme si les électrons avaient une masse pesante.

En réalité, inertie des électrons ou inertie du champ magnétique qu'ils créent par leur mouvement, sont deux expressions différentes d'une même idée, de même que dans l'analogie mécanique signalée, il revient au même d'attribuer de l'inertie au fil ou bien au volant dont le mouvement est lié au sien.

On a tenté de se représenter les phénomènes précédents comme une liaison des charges électriques avec un milieu hypothétique, l'*éther*, qui comme les milieux matériels posséderait à la fois de l'élasticité et de l'inertie. Mais quand on a voulu expliquer l'ensemble des phénomènes électromagnétiques par l'éther, on a été conduit à donner à celui-ci des caractéristiques invraisemblables. C'est ainsi que l'on a abandonné cette conception pour raisonner, sans faire d'hypothèses, sur les lois expérimentales.

15. **Calcul d'une inductance.** — Si, comme nous l'avons montré [7] on sait exprimer H, créé par un circuit électrique, en fonction des paramètres géométriques de ce circuit, son inductance L est calculable. Pour la déterminer, on peut utiliser l'une des trois méthodes suivantes.

1° Méthode directe basée sur la définition même de l'inductance. Elle consiste à écrire :

L = flux total engendré et embrassé quand le courant est égal à 1 unité.

2° Méthode énergétique basée sur l'égalité : énergie potentielle magnétique = énergie électrocinétique :

$$\int_0^v \frac{1}{2} BH \, dv = \int_0^v \frac{1}{2} \mu H^2 \, dv = \frac{1}{2} LI^2$$

3° Méthode analogique applicable seulement aux fréquences élevées où joue pleinement l'effet de peau électrique et basée sur une analogie de formules. Nous avons vu [9] dans cette hypothèse :

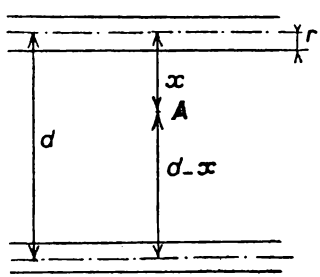


Fig. 7-18.

$\varepsilon_0\mu_0$ = capacité linéique × inductance linéique,

$\varepsilon_0\mu_0 = C'L'$.

D'où :

$$L' = \varepsilon_0\mu_0/C'.$$

Voici des exemples (importants en Électrotechnique) d'application de ces trois méthodes.

1° *Inductance d'une ligne double* (conducteurs cylindriques parallèles).

Soit un circuit constitué par deux conducteurs cylindriques de rayon r dont les axes parallèles sont distants de d (fig. 18). Déterminons l'autoinductance de ce circuit par *unité de longueur*, c'est-à-dire le flux qu'il engendre et embrasse le long de cette longueur unité lorsqu'il est parcouru par un courant unité.

a) *Flux extérieur Φ_1 dans la zone rectangulaire extérieure aux conducteurs* (première méthode). — L'induction en un point A à la distance x de l'axe de l'un et $d - x$ de l'axe de l'autre a pour expression :

$$B = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right) \frac{\mu_0}{2\pi}$$

puisque les inductions créées par les deux conducteurs en A ont la même direction (perpendiculaire au plan de la figure) et le même sens.

$$\Phi_1 = \int_r^{d-r} B\,dx = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_r^{d-r} \left(\frac{dx}{x} + \frac{dx}{d-x}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\ln \frac{x}{d-x}\right]_r^{d-r}$$

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\ln \frac{d-r}{d-d+r} - \ln \frac{r}{d-r}\right] = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\ln \frac{d-r}{r} + \ln \frac{d-r}{r}\right] = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-r}{r}.$$

Généralement r est négligeable devant d. D'où

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r}.$$

b) *Flux intérieur Φ_2 engendré et embrassé par le courant dans le conducteur lui-même* (deuxième méthode). — A la distance s de l'axe, l'induction a pour valeur [3-4] $B_s = \frac{\mu_0}{2\pi s} \times$ courant enlacé par la circonférence de rayon s (fig. 19)

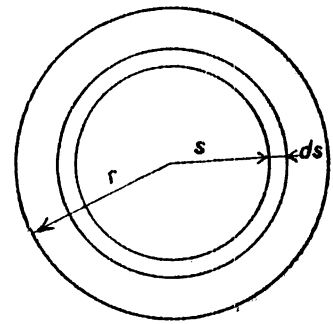


FIG. 7-19.

$$B_s = \frac{\mu_0}{2\pi s} \times \frac{Is^2}{r^2} = \frac{\mu_0 Is}{2\pi r^2}\ (1).$$

Dans le volume $d\upsilon$ compris entre les cylindres de longueur unité et de rayons respectifs s et $s + ds$, l'énergie potentielle magnétique a pour expression :

$$dW = \frac{1}{2} BH\,d\upsilon = \frac{1}{2} \mu H^2\,d\upsilon = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{Is}{2\pi r^2}\right)^2 \times 2\pi s\,ds = \frac{\mu}{4\pi r^4} I^2 s^3\,ds\ (2)$$

et dans tout le volume (cylindre de rayon r) intéressé par le flux Φ_2 :

$$W = \int_0^{\upsilon} dW = \int_0^r \frac{\mu I^2}{4\pi r^4} s^3\,ds = \frac{\mu I^2}{16\pi} \qquad (\mu = \mu_0\mu_r).$$

Donc si L_2 désigne le coefficient d'autoinduction dû au flux intérieur Φ_2, on a :

$$\frac{1}{2} L_2 I^2 = \frac{\mu I^2}{16\pi} \qquad \text{d'où} \qquad L_2 = \frac{\mu}{8\pi}.$$

Comme nous avons supposé que I est égal à 1, nous avons :

$$L_2 = \Phi_2 = \frac{\mu}{8\pi}.$$

Dans l'ensemble des deux conducteurs, ce flux Φ_2 sera égal à $\mu/4\pi$. Donc enfin :

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r} + \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(4 \ln \frac{d}{r} + \mu_r\right).$$

(1) Le champ H créé à la distance s par le courant passant à l'extérieur du cercle de rayon s est nul. En effet, en vertu du théorème d'Ampère, le travail accompli par le vecteur H parcourant ce cercle est nul, parce que, dans son circuit fermé, le vecteur H n'enlace pas ce courant. Le travail étant nul, le champ est nul.

(2) Nous désignons ici par μ la perméabilité *réelle* [3-22] et non la perméabilité *apparente*, parce que le champ démagnétisant est nul.

en henrys par kilomètre de ligne il aura pour expression :

$$\underset{\text{henry}}{L} = 10^3 \frac{\mu_0}{4\pi}\left(4 \ln \frac{d}{r} + \mu_r\right).$$

Par kilomètre de conducteur, L sera la moitié du précédent :

$$\underset{\text{henrys}}{L} = \frac{10^3\ \mu_0}{4\pi}\left(2 \ln \frac{d}{r} + \frac{\mu_r}{2}\right).$$

c) *Inductance d'une ligne coaxiale* (troisième méthode) [1]. — Une ligne coaxiale (fig. 20) est constituée comme un condensateur cylindrique dont la capacité linéique est :

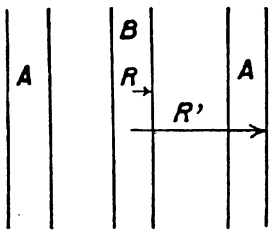


FIG. 7-20.

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln R_2/R_1} \qquad \text{(diélectrique : vide)}$$

D'où par la méthode analogique :

$$L' = \varepsilon_0\mu_0/C' = \frac{\varepsilon_0\mu_0 \ln R_2/R_1}{2\pi\varepsilon_0} = \mu_0 \frac{\ln R_2/R_1}{2\pi}$$

16. Forces électromagnétiques dues à l'induction magnétique produite par le courant propre à un circuit. — Considérons un circuit qui, parcouru par un courant, se déforme du fait des forces électromagnétiques F dues à l'induction magnétique produite par *son propre courant.*

Appliquons à ce circuit le principe des déplacements virtuels et supposons qu'une déformation élémentaire de ce circuit fasse varier de $d\Phi$ le flux total qu'il embrasse et de dL son inductance.

Admettons qu'au cours de la déformation le *courant* I dans le circuit soit *maintenu constant* (par une F. É. M. additionnelle qui compense exactement la F. C. É. M. induite à chaque instant).

Le principe de la conservation de l'énergie appliqué au système nous permet d'écrire :

Énergie fournie par la source	=	Accroissement de l'énergie emmagasinée	+	Travail produit par les forces F
$I\,d\Phi$	=	$\frac{1}{2} I\,d\Phi$	+	travail produit.

Il apparaît que l'énergie fournie par la source se divise en deux parts égales : accroissement d'énergie électrocinétique et travail produit. On a donc :

$$\text{Travail produit} = \frac{1}{2} I\,d\Phi$$

[1] La formule n'est valable qu'en haute fréquence. Par effet de peau, le champ H est pratiquement nul dans les conducteurs.

Quand la déformation consiste dans un déplacement dx d'un élément de circuit, la force F agissant sur cet élément dans la direction de son déplacement sera donnée par l'équation :

$$\frac{1}{2} I \, d\Phi = F \times dx$$

D'où :

$$F = \frac{1}{2} I \frac{d\Phi}{dx} \qquad (\text{avec } \Phi = LI)$$

$$\boxed{F \underset{\text{N}}{} = \frac{1}{2} I^2 \underset{\text{A}}{} \frac{dL}{dx} \overset{\text{H}}{\underset{\text{m}}{}}}$$

17. **Application. Force portante d'un électroaimant.** — Soit (fig. 21) un électroaimant de n spires, dont l'inductance est L et qui est parcouru par un courant I. Quand son armature placée à la distance x du noyau subit un déplacement dx sous l'action de la force F, la formule précédente nous donne :

$$F = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dx}$$

avec :

$$L = n^2/\mathcal{R} = n^2\mathfrak{P} \qquad [7]$$

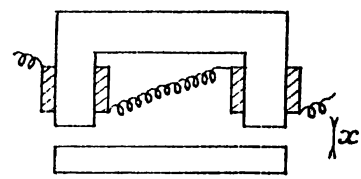


FIG. 7-21.

($\mathcal{R}$ = réluctance et $\mathfrak{P} = 1/\mathcal{R}$ = perméance du circuit magnétique).

$$\boxed{F = \frac{1}{2} n^2 I^2 \frac{d\mathfrak{P}}{dx}} \qquad \text{(formule de Picou)}$$

Appliquons cette formule générale à l'électroaimant donné. Soit s la section du fer, μ_r la perméabilité relative correspondant au courant I. Nous avons l la longueur du fer. Nous avons :

$$\mathcal{R} = l/\mu_0\mu_r s + 2x/\mu_0 s$$

D'où :

$$F = \frac{1}{2} n^2 I^2 \cdot \frac{1}{\mathcal{R}^2} \frac{d\mathcal{R}}{dx} = \frac{1}{2} n^2 I^2 \times \frac{1}{(l/\mu_0\mu_r s + 2x/\mu_0 s)^2} \times \frac{2}{\mu_0 s}$$

Lorsque la distance x est faible en regard de la surface s, la fraction $2x/\mu_0 s$ est négligeable devant le terme $l/\mu_0\mu_r s$ et de plus l'induction magnétique B est constante jusqu'au voisinage des bords :

$$F = \frac{1}{2} n^2 I^2 \times \frac{1}{(l/\mu_0\mu_r s)^2} \times \frac{2}{\mu_0 s}$$

Or la formule d'Hopkinson [5-14] donne dans ces conditions :

$$\Phi = Bs = \frac{nI}{l/\mu_0\mu_r s} \quad \text{d'où} \quad B^2s^2 = \frac{n^2I^2}{(l/\mu_0\mu_r s)^2}$$

Dès lors :

$$\underset{N}{F} = \frac{1}{2} B^2s^2 \times \frac{2}{\mu_0 s} = \frac{B^2 s}{\mu_0} = \boxed{\frac{1}{2} \frac{\overset{T}{B^2} \times \overset{m^2}{S}}{\mu_0}} \quad \text{(formule de Maxwell)}$$

$S = 2s$ désignant la surface totale de contact entre noyau et armature.

La formule de Maxwell n'est, comme on l'a vu, pratiquement applicable qu'*au cas où l'armature est sensiblement au contact du noyau.*

Observation importante. — *Sens de l'action d'un aimant sur une substance quelconque.* — Le remplacement de l'air (entrefer) par du fer équivaut à la substitution de l'énergie potentielle par unité de volume $1/2\ B^2/\mu_0\mu_r$ à l'énergie par unité de volume $1/2\ B^2/\mu_0$.

Quand on a $\mu_r > 1$, il y a *diminution* d'énergie potentielle quand l'armature se *rapproche du noyau.*

Quand au contraire, la perméabilité relative de l'armature est inférieure à 1, il y a *diminution* d'énergie potentielle quand l'armature s'*éloigne* du noyau. La conclusion est la suivante :

Une substance para ou ferromagnétique ($\mu_r > 1$) est attirée par un aimant ;

Une substance diamagnétique ($\mu_r < 1$) est repoussée par un aimant.

Évidemment, dans le cas des substances para et diamagnétiques, les forces exercées sont faibles parce que μ_r est voisin de 1.

Signalons que, transposé dans le domaine des champs électriques et des diélectriques ($\varepsilon_r > 1$), ce résultat explique l'attraction des isolants par les corps électrisés.

EFFETS DE L'AUTOINDUCTION

Quand le courant est variable dans un circuit (fig. 13) d'inductance L, résistance R, soumis à une F. É. M. constante E, l'équation de son fonctionnement est [11] :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E.$$

16. **Fermeture du circuit.** — Fermons l'interrupteur K (fig. 13). Nous savons [2] que le courant n'atteindra son intensité de régime $i_0 = E/R$ qu'au bout d'un certain temps. Proposons-nous de déterminer la loi de croissance de ce courant. Pour cela, il suffit d'intégrer l'équation différentielle ci-dessus, qui, en posant :

$$\tau = \frac{L}{R},$$

s'écrit :

$$\tau \frac{di}{dt} + i = i_0,$$

en tenant compte des conditions initiales (à l'instant $t = 0$, on a $i = 0$). On obtient :

$$i = i_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = i_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Cette expression montre qu'à la fermeture du circuit :

a) La F. É. M. d'autoinduction rend d'autant plus lent l'établissement du courant que le rapport $\tau = L/R$ est plus grand. On l'appelle la *constante de temps* [1] du circuit. De même, dans le dispositif de la figure 17, la mise en route du fil, sous l'action d'une force constante, s'effectue d'autant plus lentement que le moment d'inertie du volant est plus grand pour la même valeur du frottement fluide.

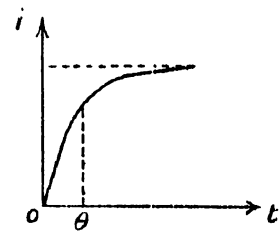


FIG. 7-22.

b) Théoriquement, le courant permanent i_0 n'est atteint qu'après un temps infini. Pratiquement, en raison de la valeur élevée de l'exposant $\frac{R}{L}$, le terme exponentiel « s'évanouit » très vite et généralement le courant, au bout d'un temps très court, est très peu inférieur au courant permanent.

c) La constante de temps permet d'avoir rapidement une approximation sur la durée d'établissement du courant. Si, dans l'expression de i nous faisons t égal à θ, nous obtenons :

$$i = i_0\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0{,}633\ i_0.$$

Donc, la constante de temps représente le temps au bout duquel le courant a atteint 63,3 % de sa valeur définitive. Par exemple, dans une bobine pour laquelle on a :

$L = 10$ H et $R = 2\ \Omega$, ce temps sera de 5 secondes.

Cette application numérique montre que la durée d'établissement du courant peut n'être pas négligeable. Elle entre, par exemple, en considération dans les moteurs à fréquents renversements de marche (inversions fréquentes du courant dans leurs électroaimants) et dans le nombre de signaux qu'une ligne télégraphique peut émettre par seconde.

d) L'expression de i mise sous forme :

$$\frac{i}{i_0} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

[1] La grandeur $\frac{L}{R}$ est nécessairement homogène à un temps quelles que soient les hypothèses à la base du système de mesure. En effet i tend vers la valeur i_0. Il faut donc que l'exposant de e soit un nombre, autrement dit que le rapport $\frac{L}{R}$ représente un temps.

montre qu'en multipliant par m la constante de temps, on multiplie en même temps par m le temps au bout duquel le rapport $\frac{i}{i_0}$ prend la même valeur.

e) A inductance égale, l'effet retardateur de l'autoinductance devient moins important quand la résistance r est plus grande.

f) Tout se passe, durant la période d'établissement, comme si, au courant normal, venait s'ajouter un courant $-i_0 e^{-\frac{R}{L}t}$, courant dont l'intensité diminue à partir de i_0.

g) La constante de temps (1) d'une bobine est fortement accrue lorsqu'elle comporte un noyau de fer massif. L'explication est la suivante :

Supposons que le courant dans la bobine croisse à partir de zéro. Des courants de Foucault induits dans le noyau circulent dans une couche de peau et, comme nous l'avons montré [6-21] forment écran vis-à-vis de l'intérieur du noyau (ils s'opposent à la variation du flux dans cette portion interne). Dès lors, le flux dans le noyau se constitue plus lentement ; la F. É. M. d'autoinduction dure plus longtemps et le courant est plus lent à s'établir.

Réciproquement, à l'ouverture, on constate facilement par les effets du flux (par exemple la F. É. M. induite dans une dynamo) que celui-ci ne décroît que peu à peu pour atteindre la valeur correspondant à l'aimantation rémanente.

Cette sorte d'inertie magnétique des noyaux massifs est défavorable dans certaines applications. On la diminue fortement en agissant sur sa cause (les courants de Foucault), c'est-à-dire en feuilletant les noyaux.

h) L'expression :

$$i = i_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

fait apparaître un autre moyen pour rendre plus rapide l'accroissement du courant, autrement dit pour réduire le temps qu'il met à s'établir. Ce procédé consiste à substituer à la F. É. M. constante E une F. É. M. variable qui, très grande à la fermeture de l'interrupteur, décroît au fur et à mesure que le courant croît et prend finalement la valeur E quand le courant est établi. C'est le procédé dit de *surtension momentanée* (2).

19. **Ouverture du circuit.** — Ouvrir un circuit équivaut à intercaler dans celui-ci une résistance qui devient infinie dans un temps très court. Pour établir la loi de décroissance du courant, il faudrait donc connaître la loi d'augmentation de la résistance du circuit.

Or, cette résistance est constituée surtout par celle de l'étincelle de rupture ; cette étincelle dépend de la façon plus ou moins brusque (nous allons le montrer) dont s'effectue la rupture et d'ailleurs il est impossible

(1) Elle peut atteindre plusieurs secondes dans une grosse machine à courant continu.

(2) Ce procédé équivaut à appliquer à la mise en route d'un volant un couple très supérieur au couple normal d'entraînement Γ_n puis à faire décroître le couple moteur jusqu'à Γ_n au fur et à mesure que le volant prend sa vitesse.

de connaître la loi de variation de sa résistance. En définitive, on ne peut pas établir mathématiquement l'expression, au cours de l'ouverture du circuit, de l'intensité du courant en fonction du temps.

Nous nous placerons donc dans l'hypothèse où la résistance brusquement intercalée n'est pas infinie, en considérant un circuit (fig. 23) comportant deux résistances dont l'une peut être brusquement décourt-circuitée. Nous désignerons par :

R_0 la résistance initiale totale du circuit ;

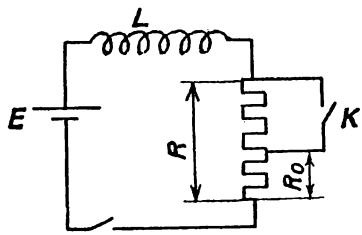


FIG. 7-23.

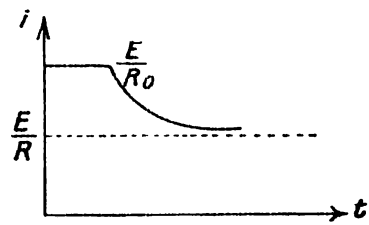


FIG. 7-24.

R la résistance finale totale du circuit après ouverture de l'interrupteur K.

L'équation différentielle :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E$$

résolue dans l'hypothèse où, à l'instant $t = 0$, on a $i = \frac{E}{R_0}$ fournit :

$$i = \frac{E}{R} + \left(\frac{E}{R_0} - \frac{E}{R}\right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t},$$

expression que nous vérifions en remarquant qu'à l'instant $t = 0$, elle donne $i = \frac{E}{R_0}$ et à l'instant $t = \infty$, $i = \frac{E}{R}$ (fig. 24).

Déterminons *la F. É. M. d'autoinduction* au cours de la décroissance du courant. A l'instant t, la F. É. M. d'autoinduction a pour valeur :

$$e_a = -L\frac{di}{dt} = L\left(\frac{E}{R_0} - \frac{E}{R}\right) \times \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$e_a = R\left(\frac{E}{R_0} - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t} = E\left(\frac{R}{R_0} - 1\right) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Comme on a $R > R_0$, la F. É. M. e_a a le même signe que E et sa valeur initiale ($t = 0$) est :

$$E\left(\frac{R}{R_0} - 1\right).$$

Elle est d'autant plus grande que $\frac{R}{R_0}$ est plus grand. Si, par exemple :

$$\frac{R}{R_0} = 101$$

$$(e_a)\ \max = 100\ E.$$

Donc l'augmentation brusque de la résistance d'un circuit provoque une F. É. M. d'autoinduction très élevée ; cette F. É. M. — qui peut atteindre plusieurs milliers de volts dans un circuit alimenté par un générateur de quelques volts — se traduit par une grande D. D. P. entre les deux pièces de l'interrupteur qui s'écartent l'une de l'autre (fig. 25) et cette tension est telle qu'une véritable décharge disruptive se produit entre elles sous la forme d'un arc de courte durée appelé *étincelle de rupture.*

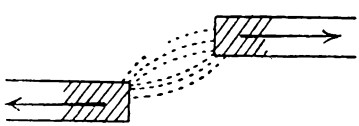


FIG. 7-25.

La production de cet arc est d'ailleurs favorisée par le fait qu'avant la séparation des surfaces de contact, des points de celles-ci sont fortement échauffés (grande résistance de contact, effet Joule intense) et sont placées dans les conditions de l'émission thermo-électronique.

On peut raisonner autrement : quand on ouvre le circuit, les deux extrémités du conducteur forment un condensateur de capacité C : celui-ci se charge sous une forte D. D. P. U, car l'énergie électrocinétique $\frac{1}{2} Li^2$ se transforme en énergie électrostatique $\frac{1}{2} CU^2$. Comme la capacité C est faible, la D. D. P. U peut prendre une valeur très élevée et capable de percer le diélectrique (l'air).

L'expérience de la figure 17 donne une analogie mécanique. Supposons que le fil comporte une portion AB constituée par un fil élastique et que, le système étant en mouvement, on veuille l'arrêter net en fixant brusquement le milieu O de cette portion. Il y aura alors transformation de l'énergie cinétique de l'ensemble en énergie élastique accumulée dans le fil AB et celui-ci risquera de s'allonger au point de se rompre.

Des phénomènes analogues se produisent lorsqu'on veut arrêter net un volant, par blocage d'un frein par exemple, ou lorsqu'on ferme brusquement un gros tuyau parcouru par un courant liquide : dans le premier cas, on risque une rupture mécanique, dans le deuxième cas une surpression (coup de bélier) capable de faire éclater la conduite d'eau.

20. **Inconvénients de l'autoinduction à l'ouverture des circuits.** — 1° *Risque de perçage des isolants.* — Coupons le courant I passant dans une bobine de résistance R formée de n spires régulièrement enroulées (fig. 26). Si la bobine était alimentée sous une D. D. P. U, la D. D. P. entre spires consécutives passe au moment de la rupture de la valeur :

$$\frac{U}{n} = \frac{RI}{n}$$

à la valeur $\frac{E_a}{n}$ (E_a = F. É. M. d'autoinduction). Comme E_a peut être très supérieur à U, la tension entre spires jointives peut atteindre une valeur telle que l'isolant interposé soit percé.

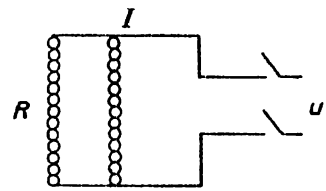


FIG. 7-26.

2° *Risque d'électrocution.* — La valeur élevée que peut prendre la F. É. M. d'autoinduction à la rupture du courant dans une bobine rend dangereux, à cet instant, le contact du corps humain avec les bornes de toute bobine douée d'une grande inductance.

3° *Détérioration des interrupteurs.* — Un arc électrique jaillissant entre deux électrodes détermine, d'une électrode à l'autre, un transport de matière : du cuivre sera plus ou moins arraché aux surfaces en contact de l'interrupteur, d'où la détérioration progressive de cet organe. Par ailleurs, l'arc risque d'allumer un incendie.

Pour atténuer ces inconvénients, on emploie parfois des palliatifs (réduction de l'intensité du courant avant sa rupture, soufflage magnétique de l'arc), mais le véritable remède est l'absorption de l'énergie électrocinétique emmagasinée dans le circuit électrique.

21. **Absorption de l'énergie électromagnétique du circuit électrique. Condensateurs. Résistances de décharge.** — Pour absorber l'énergie électromagnétique emmagasinée dans le circuit doué d'autoinduction, deux procédés peuvent être employés.

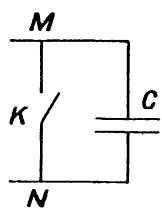


FIG. 7-27.

1° *Condensateurs.* — Mettons, en dérivation sur l'interrupteur K d'un circuit doué d'inductance un condensateur (fig. 27). Lorsqu'on ouvre K, l'énergie électrocinétique transformée en énergie électrostatique $\frac{1}{2} CU^2$ a pour effet de charger un condensateur de capacité C bien supérieure à celle de l'interrupteur en période d'ouverture. Dès lors, la D. D. P. U entre les armatures (et aussi bien entre contacts de l'interrupteur) est beaucoup plus faible et peut ne pas provoquer d'étincelles [1]. Remarquons qu'à la fermeture de K, le condensateur se décharge à travers l'interrupteur dans le circuit $CMKNC$.

Tout se passe comme si, en dérivation sur le robinet d'une conduite d'eau, on disposait une sorte de chambre d'équilibre (fig. 28), constituée par un récipient A divisé en deux par une paroi élastique. A la fermeture du robinet, l'énergie cinétique de l'eau crée, en amont du robinet, une surpression (coup de bélier) qui, en déformant la paroi élastique de A, provoque une admission de liquide dans la dérivation, donc une atténuation de la surpression.

L'emploi d'un condensateur convient au cas d'un interrupteur à rup-

[1] D'ailleurs, la capacité étant plus grande, la charge s'effectue plus lentement et l'élévation de la D. D. P. peut être assez retardée pour que les contacts se soient éloignés à une distance telle que l'étincelle ne jaillisse plus.

tures fréquentes tel que celui qui figure au primaire d'une bobine de Ruhmkorff.

2° *Résistance de décharge.* — En dérivation avec une inductance L, disposons d'une résistance ρ *dépourvue d'inductance* et de façon telle qu'un commutateur *Oab* ferme le circuit bobine-résistance avant de couper le circuit générateur-bobine (fig. 29).

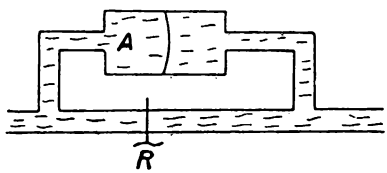


FIG. 7-28.

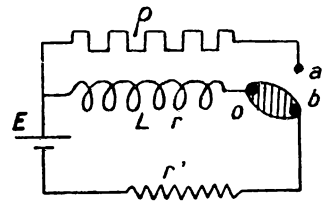


FIG. 7-29.

Plaçons-nous dans le cas où nous avons l'égalité $r' = \rho$ et posons :

$$r + \rho = r + r' = R.$$

Quand le commutateur établit la liaison *Oa* en coupant la liaison *Ob*, un circuit comportant la bobine et la résistance ρ est fermé. Ce circuit ne comporte que la F. É. M. d'autoinduction et la loi d'Ohm fournit :

$$-L\frac{di}{dt} = Ri \qquad \text{soit} \qquad L\frac{di}{dt} + Ri = 0.$$

On en déduit aisément par intégration :

$$i = Ae^{-\frac{R}{L}t},$$

A désignant une constante dont nous obtiendrons l'expression par les conditions initiales. En effet, le commutateur « aiguille » sur *Oa* un courant qui dans l'inductance était égal à $\frac{E}{R}$, et qui constitue le courant initial du circuit bobine-résistance ρ.

A l'instant $t = 0$, on a $i = \frac{E}{R}$.

D'où :

$$A = \frac{E}{R}$$

(E = F. É. M. du générateur) ;

$$i = \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

et la F. É. M. d'autoinduction a pour expression :

$$e_a = -L\frac{di}{dt} = -L\left(-\frac{R}{L}\right)\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = Ee^{-\frac{R}{L}t},$$

de telle sorte qu'à l'instant initial ($t = 0$), on a :

$$e_a = E,$$

ce qui montre que, lorsque la résistance ρ appelée *résistance de décharge* est telle que la résistance du circuit de décharge soit égale à celle du circuit initial, la F. É. M. d'autoinduction qui prend naissance dans

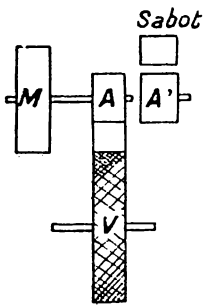


FIG. 7-30.

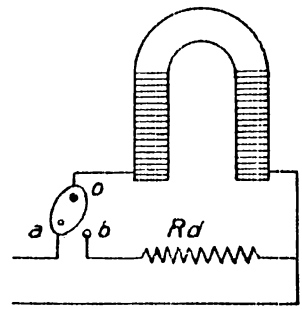


FIG. 7-31.

la bobine ne dépasse jamais la F. É. M. du générateur en circuit. Cela explique que les résistances de décharge sont calculées de façon telle que le courant initial par lequel elles sont parcourues soit à peu près égal au courant qui circulait dans les bobines d'inductance avant rupture du circuit d'alimentation

Physiquement, on se représentera que l'énergie électromagnétique de la bobine vient se dépenser dans le circuit de décharge (effet Joule dans la résistance ρ) ; la F. É. M. d'autoinduction vient s'éteindre dans ce circuit. Une analogie mécanique serait la suivante : la poulie *A* d'un moteur *M* (fig. 30) entraîne par courroie un volant *V* qui possède sensi-

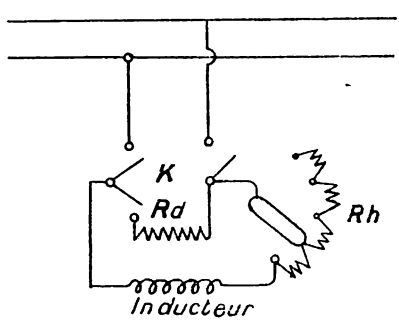


FIG. 7-32.

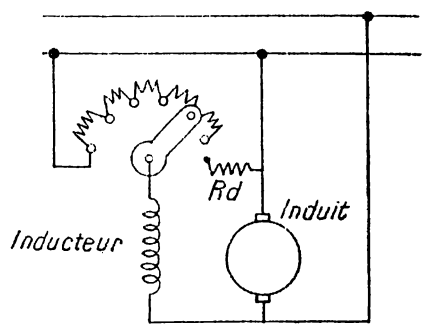


FIG. 7-33.

blement toute l'inertie du système. On peut arrêter très rapidement le moteur — et sans accident — en faisant passer la courroie sur une poulie folle *A'* sur laquelle on applique le sabot d'un frein : l'énergie cinétique du volant vient se dépenser en chaleur par frottement du sabot sur *A'*.

Les figures 31 à 33 donnent des dispositions courantes de résis-

tances de décharge appliquées à un électroaimant ou à l'inducteur d'une machine électrique.

INDUCTION MUTUELLE

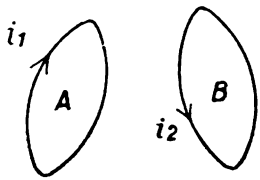


FIG. 7-34.

22. **Deux circuits peuvent mutuellement induire l'un dans l'autre une F. É. M.** — Deux circuits A et B sont en état d'induction mutuelle lorsqu'une fraction du flux créé par l'un est embrassée par l'autre (fig. 34).

Dans ces conditions, toute variation du courant qui parcourt l'un des deux circuits engendre dans l'autre une F. É. M. d'induction appelée force électromotrice d'*induction mutuelle.*

23. **Coefficients d'induction.** — Exprimons les flux d'induction mutuelle dans l'hypothèse où le milieu dans lequel les spires sont placées est de l'air ou une substance ferromagnétique dans un intervalle convenable d'induction.

Le flux traversant B est proportionnel au courant de A qui l'a engendré ; nous écrirons donc :

Flux dû à A et traversant $B = M_{AB} \times$ courant dans $A = M_{AB} i_1$.

De même le flux traversant A est proportionnel au courant de B qui l'a engendré.

Flux dû à B et traversant $A = M_{BA} \times$ courant dans $B = M_{BA} i_2$.

M_{AB} et M_{BA} désignant des coefficients de proportionnalité, appelés *coefficients d'induction.*

24. **Les deux coefficients sont égaux. Inductance mutuelle.** — On peut montrer expérimentalement l'égalité des deux coefficients

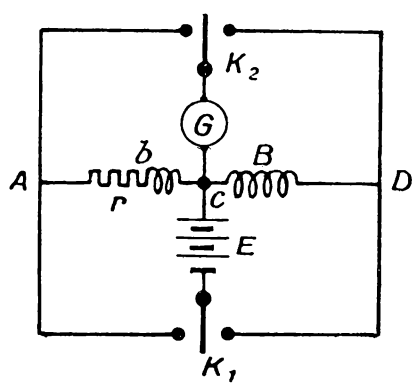


FIG. 7-35.

d'induction à l'aide du montage de la figure 35 dans laquelle B et b sont des bobines très différentes agissant magnétiquement l'une sur l'autre ; r est une résistance additionnelle destinée à égaliser les résistances

entre A et C, puis entre C et D ; G est un galvanomètre balistique ou un fluxmètre, E est une source non polarisable.

1° On ferme b sur le galvanomètre et on alimente B. Le galvanomètre dévie de θ_1.

2° On ferme B sur le galvanomètre et on alimente b. Le galvanomètre donne *la même* déviation θ_1.

Les quantités d'électricité induites $Q = \Phi/R$ étaient donc les mêmes dans les deux cas. Comme les résistances R des deux circuits étaient égales, la variation de flux était la même dans les deux cas. Le flux total issu de B et embrassé par b était égal au flux total issu de b et embrassé par B pour un même courant I dans les bobines. Cela démontre l'égalité :

$$M_{AB} = M_{BA} = M.$$

A la valeur commune des deux coefficients d'induction, on donne le nom d'*inductance mutuelle* des deux circuits. On peut la définir :

Le flux total que l'un des circuits envoie à travers l'autre lorsque le premier est parcouru par l'unité de courant.

La même définition s'applique évidemment au cas où le milieu dans lequel sont placés les circuits est ferromagnétique et susceptible de saturation ; mais, dans ce cas, le coefficient M dépend de l'état de saturation, donc des courants i_1 et i_2.

Remarque I. — Le flux d'induction mutuelle qui traverse un circuit électrique peut être de même sens que celui du flux propre à ce circuit (Li) ou de sens contraire.

Dans le premier cas, le flux d'induction mutuelle *s'ajoute* au flux propre à ce circuit ; l'inductance mutuelle est alors *positive*. Dans le second cas, le flux d'induction mutuelle se *retranche* du flux propre au circuit : l'inductance mutuelle est alors *négative*.

Remarque II. — Une inductance mutuelle désignant un rapport $\frac{\text{flux}}{\text{intensité d'un courant}}$, comme une inductance propre aura la même unité, le *henry*.

Deux circuits ont une inductance mutuelle de 1 henry, lorsque :

Un courant de 1 A *dans le premier détermine à travers le second un flux total de* 1 Wb ;

ou bien :

Un courant variant régulièrement de 1 A/s *dans le premier détermine dans le second une F. É. M. d'induction de* 1 V.

25. **Calcul de l'inductance mutuelle par la formule de Neumann.** — Nous avons, à partir du potentiel vecteur, exprimé [1-26] le flux qu'un circuit C_1 envoie à travers un circuit C_2 :

$$\Phi_{1-2} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{dl_1\, dl_2 \cos 0}{r}$$

(0 = ange lformé par les éléments dl_1 et dl_2).

L'inductance mutuelle des deux circuits est donc :

$$M = \frac{\Phi_{1-2}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{dl_1\, dl_2 \cos\theta}{r}$$

Telle est la formule de *Neumann* qui permet, dans le cas général, la détermination de l'inductance mutuelle M de deux circuits.

26. **Relation entre inductances propres et inductance mutuelle.** — 1° *Couplage parfait.* — Soient deux bobines B_1, B_2 dont le circuit magnétique commun a pour réluctance $\mathcal{R}$ et disposées de façon telle que *tout le flux* engendré par l'une soit embrassé par l'autre. Si n_1 et n_2 désignent leur nombre de spires, nous aurons, en appliquant la définition même du coefficient d'induction mutuelle :

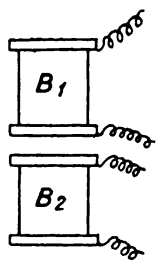


FIG. 7-36.

[M] = flux total dû à B_1 et embrassé par B_2 lorsque le courant dans B_1 est égal à 1.

Soit F_1 la force magnétomotrice créée par B_1 :

$$|M| = n_2\Phi = n_2 \times \frac{F_1}{\mathcal{R}} = n_2 \times \frac{n_1 \times 1}{\mathcal{R}} = \frac{n_1 n_2}{\mathcal{R}}.$$

Or, nous avons obtenu [7], pour les inductances propres L_1, L_2 des bobines B_1, B_2 les expressions suivantes :

$$L_1 = \frac{n_1^2}{\mathcal{R}} \qquad L_2 = \frac{n_2^2}{\mathcal{R}}.$$

On voit que l'on a :

$$\boxed{|M| = \sqrt{L_1 L_2}}$$

2° *Couplage imparfait.* — Une fraction seulement du flux total engendré par B_1 est embrassée par B_2 et réciproquement (fig. 37). On a donc :

$$|M| < n_2\Phi \qquad \text{ou} \qquad |M| < \frac{n_1 n_2}{\mathcal{R}},$$

ce qui revient à :

$$\boxed{|M| < \sqrt{L_1 L_2}}$$

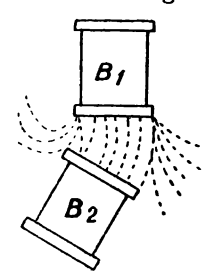


FIG. 7-37.

On voit qu'en déplaçant la bobine B_2 par rapport à la bobine B_1, on fait, toutes choses égales, varier le flux commun aux deux bobines, donc leur coefficient d'induction mutuelle. Lorsque M a une valeur élevée, on dit que le couplage des deux bobines est *serré*, il est dit *lâche* dans le cas contraire — et le rapport $\frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ définit le *degré de couplage* des deux bobines.

Ce degré de couplage devient sensiblement égal à 1 lorsque les deux bobines sont enfilées sur le même noyau.

27. **Application : Modification de l'inductance globale de deux circuits en série. Variomètre.** — Soient deux bobines A, B, parcourues par le même courant i dans le même sens ; désignons par :

L_1 le coefficient d'autoinduction de la bobine A ;
L_2 le coefficient d'autoinduction de la bobine B ;
M le coefficient d'induction mutuelle des deux bobines.

Deux cas peuvent se présenter :

a) Le flux d'induction mutuelle s'ajoute pour chacune des bobines à son flux propre. Le flux total engendré et embrassé par l'ensemble des deux bobines est donc :

$$\Phi = (L_1 i + Mi) + (L_2 i + Mi)$$

et l'inductance de l'ensemble de deux bobines est égale à :

$$L_1 + L_2 + 2M.$$

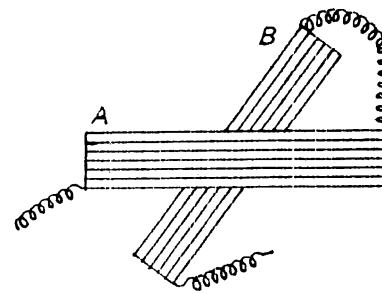


FIG. 7-38.

b) Le flux d'induction mutuelle est, pour chacune des bobines, de sens opposé à son flux propre. Le flux total engendré et embrassé par l'ensemble des deux bobines est donc :

$$\Phi = (L_1 i - Mi) + (L_2 i - Mi)$$

et l'inductance de l'ensemble :

$$L_1 + L_2 - 2M.$$

Le coefficient d'autoinduction de deux bobines en série est donc égal à :

$$L_1 + L_2 + 2M \qquad \text{ou} \qquad L_1 + L_2 - 2M$$

suivant la façon dont ces bobines sont connectées entre elles.

Les considérations précédentes ont leur application dans le *variomètre*, ensemble de deux bobines (fig. 38) mises en série et susceptibles de tourner l'une par rapport à l'autre. Suivant leur position relative, le coefficient d'autoinduction de leur ensemble varie de :

$$L_1 + L_2 + 2M \qquad \text{à} \qquad L_1 + L_2 - 2M.$$

Ajoutons que lorsqu'on veut annuler l'inductance d'une bobine, on enroule en sens contraire des couches de fil identiques.

L'inductance de la bobine devient alors, en désignant par L_1, L_2, les inductances respectives de l'ensemble des couches paires et des couches impaires (couplage parfait) :

$$L = L_1 + L_2 - 2M = L_1 + L_2 - 2\sqrt{L_1 L_2} = (\sqrt{L_1} - \sqrt{L_2})^2$$

et l'on a $L = 0$, puisque L_1 est égal à L_2.

On obtient plus simplement le même résultat en réalisant un enroulement bifilaire comme l'indique la figure 39.

28. **Effets d'un circuit fermé sans F. É. M. propre sur l'inductance d'un autre circuit.** — Soit (fig. 40) un circuit (1) dans lequel une F. É. M. variable produit un courant i_1 et un circuit fermé (2) sans F. É. M. embrassant une partie du flux du circuit (1).

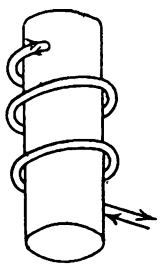


FIG. 7-39.

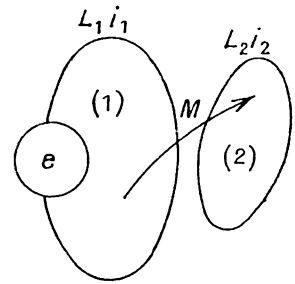


FIG. 7-40.

Désignons par L_1 et L_2 les inductances propres des circuits (1) et (2) et par M leur inductance mutuelle. Nous allons montrer que :

1° *Dans le circuit (1) la F. É. M. d'induction mutuelle est toujours de même sens* (donc de même signe) *que la F. É. M. d'autoinduction.*

En effet le courant i_2 est un courant induit par une fraction du flux Φ_{1-2} du circuit (1). Le courant obéissant à la loi de Lenz réagit contre toute variation de ce flux Φ_{1-2} comme la F. É. M. d'autoinduction du circuit (1). C'est dire que dans le circuit (1) la F. É. M. d'induction mutuelle, due à un circuit fermé sans F. É. M. propre a le même sens (donc le même signe) que la F. É. M. d'autoinduction du circuit (1). Les expressions de ces deux F. É. M. seront donc :

$$-L_1 \frac{di_1}{dt} \text{ et } -M \frac{di_2}{dt}$$

[i_2 courant induit dans (2) par les variations du flux créé par (1)].

2° *Le circuit fermé sans F. É. M. propre diminue l'inductance du circuit auquel il est magnétiquement couplé* (lié par mutuelle inductance).

Désignons à l'instant t par e la F. É. M. appliquée au circuit 1, i_1 le courant dans le circuit 1, i_2 le courant dans le circuit 2 et supposons négligeables les résistances des deux circuits. Appliquons à chacun d'eux, à l'instant t, la loi d'Ohm généralisée :

$$e = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \qquad (1)$$

$$0 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \qquad (2)$$

Multiplions (1) par L_2 et (2) par M :

$$eL_2 = L_1L_2\frac{di_1}{dt} + ML_2\frac{di_2}{dt}$$

$$0 = ML_2\frac{di_2}{dt} + M^2\frac{di_1}{dt}$$

Par différence :

$$eL_2 = L_1L_2\frac{di_1}{dt} - M^2\frac{di_1}{dt}$$

$$e = L_1\frac{di_1}{dt} - \frac{M^2}{L_2}\frac{di_1}{dt} = \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)\frac{di_1}{dt}$$

Donc la présence du circuit (2) fermé sur lui-même a pour effet de substituer à son inductance propre L_1 l'inductance $L_1 - M^2/L_2$ qu'on appelle *inductance de fuites totales.*

29. **Énergie potentielle de deux circuits en situation d'inductance mutuelle.** — Soient deux circuits caractérisés par les constantes R_1L_1 et R_2L_2, le premier seul soumis à l'action d'une F. É. M. E. L'inductance mutuelle des deux circuits est désignée par M. Appliquons aux deux circuits parcourus respectivement par les courants I_1 et I_2, la loi d'Ohm généralisée.

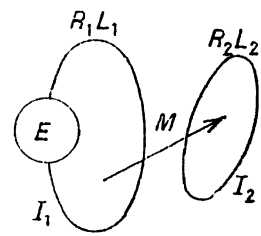


FIG. 7-41.

$$(1)\qquad E - L_1\frac{dI_1}{dt} - M\frac{dI_2}{dt} = R_1I_1$$

$$(2)\qquad 0 - L_2\frac{dI_2}{dt} - M\frac{dI_1}{dt} = R_2I_2$$

Multiplions (1) par I_1 :

$$EI_1 - L_1I_1\frac{dI_1}{dt} - MI_1\frac{dI_2}{dt} = R_1I^2$$

$$(3)\qquad EI_1 - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1I^2\right) + MI_1\frac{dI_2}{dt} = R_1I^2$$

Multiplions (2) par I_2 :

$$(4)\qquad -L_2I_2\frac{dI_2}{dt} - MI_2\frac{dI_1}{dt} = R_2I_2$$

Ajoutons les équations (3) et (4) :

$$EI_1 - R_1I_1^2 - R_2I_2^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1I_1^2\right) + MI_1\frac{dI_2}{dt} + MI_2\frac{dI_1}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_2I_2^2\right)$$

$$(5)\qquad EI_1 - R_1I_1^2 - R_2I_2^2 = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2\right]$$

expression qui montre que *le travail correspondant à la seule variation d'induction mutuelle de deux circuits* (énergie fournie par la source et non

transformée en chaleur) est égale à la *variation de la seule grandeur* MI_1I_2.

D'autre part, l'équation (5) peut s'écrire :

$$EI_1 - R_1I_1^2 - R_2I_2^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}MI_1I_2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_2I_2^2 + \frac{1}{2}MI_1I_2\right)$$

Soit en désignant par W l'énergie emmagasinée par le système et dont la variation correspond à un travail :

$$W = \frac{1}{2}I_1(L_1I_1 + MI_2) + \frac{1}{2}I_2(L_2I_2 + MI_1) = \frac{1}{2}I_1\Phi_1 + \frac{1}{2}I_2\Phi_2$$

Φ_1 et Φ_2 désignant les flux totaux embrassés par les circuits. D'où la conclusion :

L'énergie du champ magnétique due à plusieurs circuits est égale à la somme des 1/2 IΦ de chacun des circuits.

30. **Application. Détermination de la force qui s'exerce entre deux bobines.** — En appliquant le principe des travaux virtuels, l'expression de l'énergie électromagnétique d'un ensemble de bobines permet la détermination des forces qui s'exercent entre elles.

EXEMPLE. — Deux bobines coaxiales C_1C_2 (fig. 42) sont partiellement emboîtées l'une dans l'autre. C_1 parcourue par le courant I_1 a n_1 spires par unité de longueur ; C_2 parcourue par le courant I_2 a n_2 spires par unité de longueur et pour section S_2.

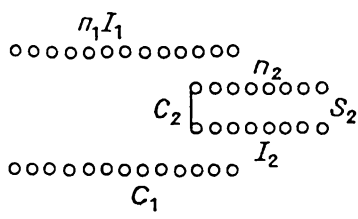


FIG. 7-42.

Une des extrémités de C_2 se trouve dans une région où l'induction de C_1 est $B = \mu_0 n_1 I_1$, l'autre se trouvant dans une région où l'induction B est pratiquement nulle. Exprimer la force F s'exerçant entre les deux bobines.

Solution. — Par raison de symétrie F est dirigée suivant l'axe commun. Un déplacement dx de C_2 vers l'intérieur de C_1 augmente de $n_2\,dx$ le nombre de spires placées dans le champ d'induction B. L'accroissement du flux total de C_2 est :

$$d\Phi_{1-2} = n_2\,dx \times BS_2 = n_2\,dx \times S_2\mu_0 n_1 I_1$$

La variation d'inductance mutuelle (pour le déplacement dx) n'est autre que cette expression dans laquelle on fait $I_1 = 1$:

$$dM = n_2\,dx \times S_2\mu_0 n_1$$

La force F est donc :

$$F = I_1I_2\frac{dM}{dx} = \mu_0 n_1 n_2 S_2 I_1 I_2$$

SYSTÈME INTERNATIONAL D'UNITÉS MÉCANIQUES, ÉLECTRIQUES, MAGNÉTIQUES

31. **Un système d'unités électriques et magnétiques est à quatre dimensions.** — Toutes les formules que nous avons écrites et qui renferment des grandeurs mécaniques contiennent au moins deux grandeurs électriques ou magnétiques (1).

(1) Exemple : $W = RI^2t$; $F = BLI$; $W = BH/2$...
N'oublions pas que ε_0 et μ_0 sont des grandeurs physiques douées de dimensions.

Il est donc impossible d'intégrer un système d'unités électriques et magnétiques dans un système mécanique.

Il faut définir *arbitrairement* une grandeur électrique ou magnétique, après avoir adopté un système mécanique. Un système d'unités électriques et magnétiques est donc *à quatre dimensions.*

32. **Comment a été établi le système international (S.I.).** — Rappelons les formules suivantes :

(1) $$F = \pm \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{r^2}$$

(Coulomb)

(2) $$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi a}$$

force électrodynamique entre courants rectilignes parallèles sur une longueur l

(3) $$e = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$$

F. É. M. induite

1° On a choisi le système légal *MKS* comme système mécanique de rattachement.

2° On a donné [1-7] la valeur $4\pi \times 10^{-7}$ à μ_0, pour que dans le système *MKS* la formule (2) soit valable avec l'ampère électrochimique. Le système d'unités est devenu *MKSA* (l'ampère : unité fondamentale).

Dès lors, par les formules $W = UIt$; $U = RI$... les unités (volt, ohm...) de l'électrocinétique ont pu être définies, en particulier (par la formule $q = it$) le *coulomb.*

3° Le coulomb a permis, par la formule (1) d'obtenir la valeur de ε_0 dans le système *MKSA* (devenu *SI*) et ainsi de définir toutes les ***unités électrostatiques*** (toutes les formules de l'électrostatique dérivent de la formule de Coulomb).

4° La définition du volt étant acquise, la formule (3) permet de définir l'unité de flux, le *Weber* et toutes les unités magnétiques (tesla, ampère F. M. M., ampère par mètre, henry, etc.) s'en déduisent.

Nous conseillons au lecteur de relire successivement les définitions de l'ampère, coulomb, volt, farad, volt par mètre, ohm, weber, tesla, ampère par mètre, henry.

COURANTS ALTERNATIFS

CHAPITRE 8

GRANDEURS ÉLECTRIQUES ALTERNATIVES

GRANDEUR SINUSOÏDALE

1. **Phénomène périodique. Période. Fréquence.** — Un phénomène est dit *périodique* lorsqu'il se reproduit identiquement à intervalles de temps égaux. Le plus petit de ces intervalles de temps s'appelle la *période* T. Le nombre de périodes par seconde s'appelle la *fréquence* f.

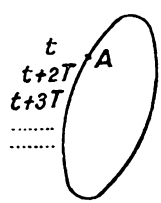


FIG. 8-1.

Entre la période et la fréquence, on a la relation évidente :

$$f = \frac{1}{T}.$$

EXEMPLE : Mouvement du balancier d'une horloge ($T = 1$ s), intensité du courant alternatif distribué en France ($T = 1/50$ s), pression de l'air en un point d'un tuyau sonore (note la_3 : $T = 1/435$ s).

Pour mieux fixer le langage dans l'établissement des définitions, il est commode de choisir un cas particulier : celui du *mouvement périodique*. Toutes les définitions pourront se transposer très facilement dans les autres phénomènes.

Nous dirons d'un mouvement qu'il est périodique quand le mobile, à intervalles de temps égaux, se retrouve dans la même position avec la même vitesse dans le même sens (fig. 1).

Par exemple, si le mobile est en A à l'instant t, il sera au même point aux instants $t + T$; $t + 2T$; $t + 3T$ ... $t + nT$; cette condition s'appliquant non seulement au point A, mais à tout point de la trajectoire.

2. Mouvement harmonique ou sinusoïdal. Comment on le définit. — 1° *Rappel du mouvement circulaire uniforme. Vitesse angulaire. Déphasage.* — Un mobile se déplace à vitesse constante dans le sens antihoraire sur une circonférence de rayon a_1 (fig. 2). Soit :

M_0 la position du mobile à l'instant zéro ;

M la position du mobile à l'instant t ;

ω la vitesse angulaire (angle dont a tourné OM en une seconde) ;

T la période (temps mis pour parcourir la circonférence).

Nous avons les relations évidentes :

$$\alpha = \omega t ; \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

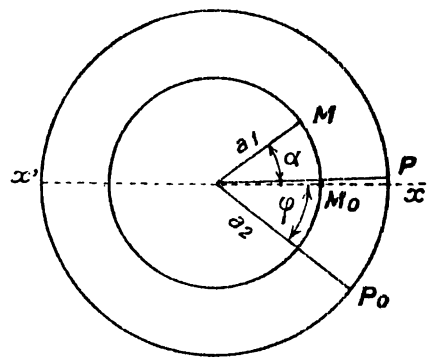


FIG. 8-2.

Imaginons maintenant un deuxième mobile P animé, sur la circonférence de même centre O et de rayon a_2, d'un mouvement de même vitesse angulaire ω (donc de même période). Si, à l'origine des temps, ce second mobile se trouve en P_0, nous pouvons rapporter son mouvement à celui du premier mobile :

a) Soit par l'avance ou le retard des deux mouvements, c'est-à-dire le temps θ en secondes qui sépare les passages des deux mobiles sur le même rayon vecteur (par exemple sur Ox) ;

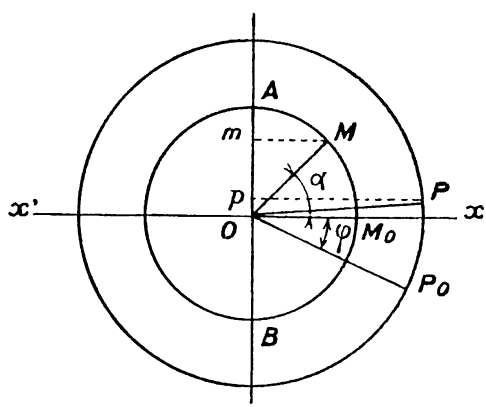


FIG. 8-3.

Les élongations sont comptées positivement dans le sens $y'y$ (sens OA). Les déphasages sont positifs dans le sens horaire.

b) Soit par le *déphasage* entre leurs mouvements, c'est-à-dire par l'angle φ que forment leurs rayons vecteurs à un instant quelconque.

Entre θ (en secondes) et φ (en radians) existe la relation évidente :

$$\frac{\theta}{T} = \frac{\omega\theta}{\omega T} = \frac{\varphi}{2\pi}.$$

On remarquera que θ et φ sont *négatifs*, si le deuxième mobile (cas de la fig. 2) est en *retard* par rapport au premier, *positifs* s'il est en avance.

2° *Le mouvement rectiligne sinusoïdal est la projection, sur une droite, d'un mouvement circulaire uniforme.* — Soit m la projection de la position M du mobile sur le diamètre AB perpendiculaire au rayon vecteur initial OM_0 du premier mobile. Par définition, le mouvement de m sur la droite AB est appelé mouvement *harmonique*. On l'appelle également

sinusoïdal parce que l'élongation $Om = y_1$ du point m est, comme nous allons le montrer, une fonction sinusoïdale du temps.

3. **Grandeur sinusoïdale. Représentation mathématique. Équation en sinus.** — L'élongation y_1 du point m s'exprime par :

$$Om = y_1 = OM \sin \alpha = a_1 \sin \omega t.$$

De même, l'élongation y_2 du point p (projection du point P) aura pour expression :

$$Op = y_2 = OP \sin \widehat{POx} = a_2 \sin (\alpha - \varphi) = a_2 \sin (\omega t - \varphi).$$

En définitive, si nous prenons l'élongation y_1 comme *origine des phases*, ce qui signifie que nous lui donnons la *valeur zéro à l'origine des temps*, l'élongation y de tout mouvement sinusoïdal, de même période, effectué sur la même droite AB sera représenté par une équation de la forme :

$$\boxed{y = a \sin (\omega t + \varphi)}$$

a = élongation maximale ou amplitude ;

φ étant positif ou négatif suivant que le déphasage est avant ou arrière.

Dans ce qui précède, y a représenté une élongation, mais y peut représenter aussi bien un angle, une pression, une force ou même autre chose qu'une grandeur mécanique : un champ électrique ou magnétique, une D. D. P., une intensité de courant électrique, etc....

L'équation précédente sera donc l'équation en sinus de toute grandeur sinusoïdale. Dans le cas général :

a représentera la *valeur maximale* de cette grandeur ;

ω représentera la *pulsation* de cette grandeur (en radians par seconde) ;

φ représentera le *déphasage* (en radians) par rapport à une autre grandeur sinusoïdale prise pour origine des phases. Lorsqu'on a $\varphi = 0$, ces deux grandeurs sont en *phase* ; lorsqu'on a $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on dit qu'elles sont en *quadrature* ; lorsqu'on a $\varphi = \pi$, les deux grandeurs sont dites en *opposition de phase.*

Avec l'équation en sinus, nous noterons les relations fondamentales que voici :

$$\boxed{\underset{\text{hertz}}{f} = \frac{1}{\underset{\text{s}}{T}}} \qquad \boxed{\underset{\substack{\text{radians}\\ \text{par seconde}}}{\omega} = \frac{2\pi}{\underset{\text{s}}{T}} = 2\pi \underset{\text{hertz}}{f}}$$

L'importance de la grandeur sinusoïdale tient surtout au fait qu'elle constitue l'élément de toute grandeur périodique (1).

Théorème de Fourier. — Une grandeur périodique quelconque de fréquence f peut être considérée comme la somme d'un terme constant (moyenne sur une période de cette grandeur) et de grandeurs sinusoï-

(1) En outre elle est facile à étudier. Ses dérivés sont sinusoïdales et de même période [6]. La somme de grandeurs sinusoïdales de même période est sinusoïdale et de même période.

dales de fréquence f, 2f, 3f, etc..., d'amplitudes et de phases initiales convenables, et cela d'une seule manière.

Dire d'une grandeur périodique quelconque qu'elle n'est pas sinusoïdale revient à dire qu'elle *a des harmoniques*, c'est-à-dire des grandeurs de fréquences multiples de sa propre fréquence. Rechercher ses harmoniques, c'est faire *l'analyse harmonique* de la grandeur considérée.

4. **Comment on représente une grandeur sinusoïdale.** — Deux modes de représentation graphique peuvent être utilisés :

1° *Représentation cartésienne.* — Elle consiste à porter en abscisses les temps t et en ordonnées les valeurs instantanées de la grandeur sinusoïdale considérée. Le graphe est une sinusoïde. La figure 4 montre d'une manière évidente son mode de construction lorsque la grandeur sinusoïdale considérée est l'élongation d'un mouvement rectiligne sinusoïdal. La sinusoïde en pointillé correspond à un décalage en retard de $\frac{1}{8}$ de période, soit à un déphasage en arrière de $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

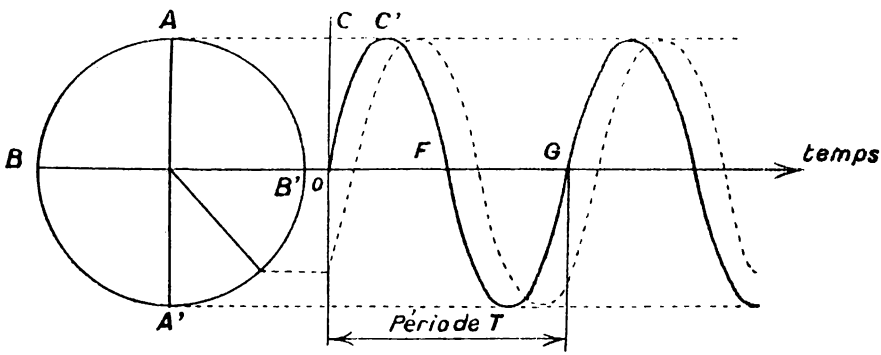


FIG. 8-4.

2° *Représentation de Fresnel ou vectorielle.* — La grandeur sinusoïdale est représentée par un vecteur ayant pour :

a) Origine : un point O arbitraire ;

b) Direction et sens : ceux d'une demi-droite Oz (fig. 5) faisant l'angle φ avec une demi-droite Ox appelée *direction origine des phases* ;

c) Module : la valeur maximale de la grandeur, représentée à une certaine échelle ; ce vecteur étant supposé tourner, dans le sens trigonométrique, avec une vitesse angulaire ω égale à la pulsation (voir observation page 192-193).

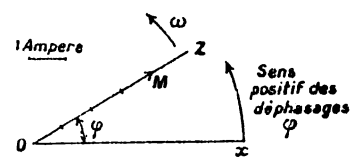


FIG. 8-5.

On voit que ce vecteur OM, supposé tournant, a comme caractéristiques les constantes mêmes a, φ, ω de la grandeur sinusoïdale et que, d'autre part, la valeur instantanée de la grandeur sinusoïdale serait représentée [2] par la projection du vecteur OM sur un axe perpendiculaire à Ox.

Par exemple, le vecteur OM peut représenter un courant sinusoïdal dont la valeur maximale est 4 ampères et déphasé de $\frac{\pi}{4}$ en avant d'une tension sinusoïdale prise pour origine des phases. La fréquence étant 50 Hz, le vecteur OM est supposé tourner dans le sens antihoraire à la vitesse angulaire $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 = 314$ rd/s.

5. **La représentation vectorielle offre de très importants avantages.** — Soient deux grandeurs sinusoïdales de même période (même pulsation ω) :

$$y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

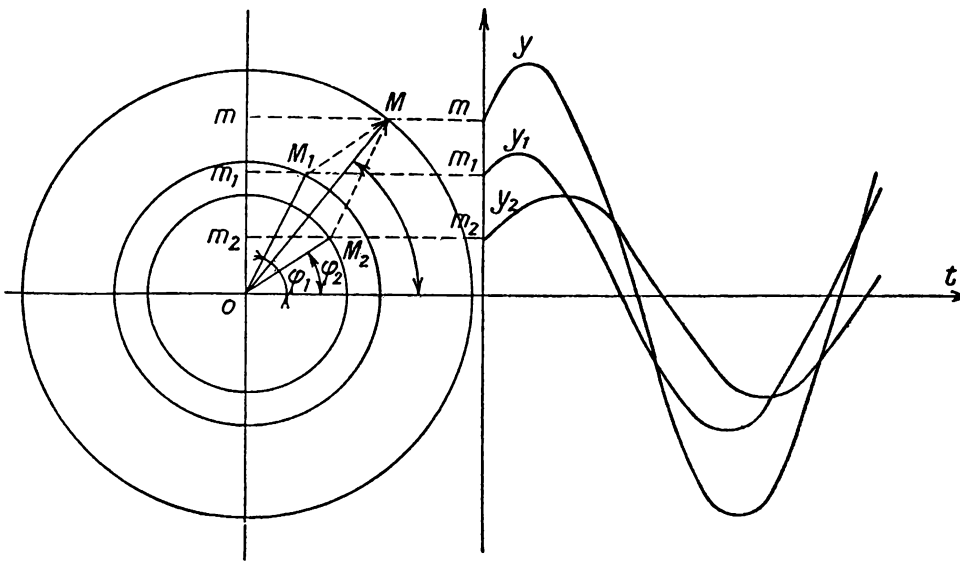


FIG. 8-6.

respectivement représentées par les vecteurs OM_1, OM_2 (fig. 6). On démontre que le vecteur OM résultant de OM_1 et de OM_2 représente la fonction sinusoïdale $y = y_1 + y_2$.

Nous vérifions, en effet, en projetant ces vecteurs sur Oy, que l'on a :

$$y = Om = Om_2 + m_2m$$
$$= Om_2 + Om_1 = y_2 + y_1.$$

Quand le temps croît, le parallélogramme $OM_1\,MM_2$ tourne avec la vitesse ω sans se déformer. La règle de composition des vecteurs représentatifs de grandeurs sinusoïdales s'étend immédiatement à un nombre quelconque de vecteurs de même période.

Une grandeur somme de plusieurs grandeurs sinusoïdales de même période est elle-même sinusoïdale et de même période ; elle est représentée par la résultante géométrique des vecteurs qui représentent chacune de ces grandeurs sinusoïdales.

On peut donc composer et décomposer les grandeurs sinusoïdales *de même période* en opérant sur leurs vecteurs représentatifs (fig. 7) *comme on le fait pour les forces* en mécanique.

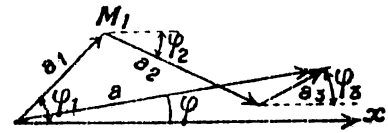


FIG. 8-7.

La construction graphique ainsi exécutée est supposée tourner à la vitesse ω, mais comme elle est *indéformable*, on peut la considérer dans une position quelconque *sans s'inquiéter de sa rotation.*

6. **Propriétés et valeurs remarquables d'une grandeur sinusoïdale.** — 1° *La dérivée d'une grandeur sinusoïdale est déphasée de* $\frac{\pi}{2}$ *en*

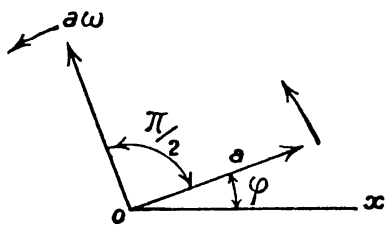


FIG. 8-8.

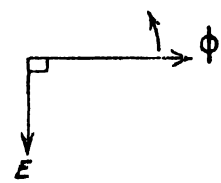


FIG. 8-9.

avance sur celle-ci. — Soit une grandeur sinusoïdale représentée par l'équation :

$$y = a \sin (\omega t + \varphi).$$

Sa dérivée est :

$$\frac{dy}{dt} = a\omega \cos (\omega t + \varphi) = a\omega \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi\right)$$

déphasée de $\frac{\pi}{2}$ en avance sur y (fig. 8).

Corollaire. — Toute force électromotrice sinusoïdale est déphasée de $\frac{\pi}{2}$ *en retard par rapport au flux sinusoïdal qui lui donne naissance.*

On sait en effet que la F. É. M. induite a pour expression $-\frac{d\Phi}{dt}$. Elle est égale à la dérivée changée de signe du flux ; elle est donc représentée par un vecteur en opposition de phase avec cette dérivée. Le graphique du flux sinusoïdal et de la F. É. M. induite E à laquelle il donne naissance est donné par la figure 9.

2° *Le produit de deux grandeurs sinusoïdales de même période est formé d'un terme constant et d'un terme sinusoïdal de fréquence double.* — Soient deux grandeurs sinusoïdales de même période :

$$y_1 = a \sin \omega t ;$$
$$y_2 = b \sin (\omega t + \varphi).$$

En remarquant qu'un produit de sinus se transforme en une différence de cosinus, on a :

$$y_1 y_2 = \frac{ab}{2} \cos \varphi - \frac{ab}{2} \cos (2\omega t + \varphi).$$

Le premier terme est constant, le second est sinusoïdal de pulsation 2ω, c'est-à-dire de fréquence double de celle de y_1 et y_2.

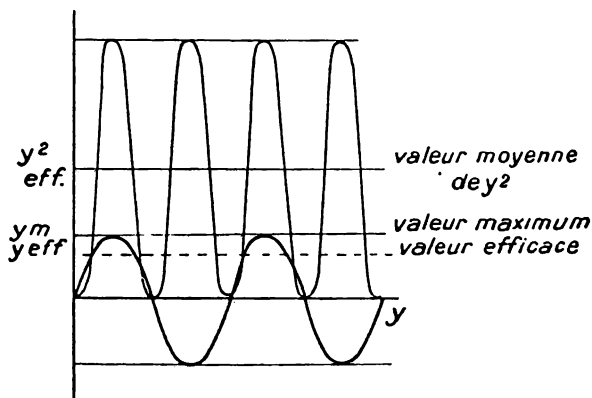


FIG. 8-10.

Valeur efficace d'une grandeur sinusoïdale. — Exprimons le carré d'une grandeur sinusoïdale :

$$y = a \sin \omega t,$$

nous avons, en vertu de ce qui précède :

$$y^2 = a^2 \sin^2 \omega t = y \times y = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \cos 2\omega t.$$

La valeur moyenne de y^2 pendant une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est égale à $\frac{a^2}{2}$, car le second terme est sinusoïdal, sa période est moitié de celle de y $\left(T' = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{T}{2}\right)$ et la valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale dans l'intervalle d'une double période est nulle. Donc :

$$\text{Valeur moyenne de } y^2 = \frac{1}{T} \int_0^T y^2 \, dt = \frac{a^2}{2} \text{ (fig. 10).}$$

On désigne sous le nom de *valeur efficace* y_{eff} d'une grandeur sinusoïdale la racine carrée de son moyen carré, c'est-à-dire la grandeur constante :

$$y_{eff} = \sqrt{\text{valeur moyenne de } y^2} = \boxed{\frac{a}{\sqrt{2}}}.$$

La valeur efficace d'une grandeur sinusoïdale est égale à sa valeur maximale divisée par $\sqrt{2}$.

Grandeur périodique quelconque

7. Valeur efficace d'une grandeur périodique quelconque. — THÉORÈME. — *La valeur efficace d'une grandeur périodique quelconque est égale à la racine carrée de la somme des carrés des valeurs efficaces des termes de son développement en série de Fourier* [1].

Soit une fonction périodique $y = f(t)$ développée en série de Fourier :

$$y = y_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + y_2 \sin(2\omega t - \varphi_2) + y_3 \sin(3\omega t - \varphi_3) + \dots$$

Par définition même de la valeur efficace de y, on aura :

$$y_{eff}^2 = \frac{1}{T} \sum \int_0^T y_p^2 \sin^2(p\omega t - \varphi_p)\, dt + \frac{2}{T} \sum \int y_m y_n \sin(m\omega t - \varphi_m) \sin(n\omega t - \varphi_n)\, dt. \qquad (1)$$

Or tout terme tel que :

$$\int_0^T y_m y_n \sin(m\omega t - \varphi_m) \sin(n\omega t - \varphi_n)\, dt \qquad (2)$$

peut être transformé en une différence de cosinus et s'écrire :

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^T \cos[(m+n)\omega t - (\varphi_m + \varphi_n)]\, dt - \int_0^T \cos[(m-n)\omega t - (\varphi_n - \varphi_m)]\, dt\right]$$

l'intégrale d'une grandeur sinusoïdale dans l'intervalle d'un nombre entier de périodes étant nulle, les termes tels que (2) seront nuls.

L'intégrale du premier terme de (1) s'écrit :

$$\int_0^T \frac{dt}{2} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T \cos 2(p\omega t - \varphi_p)\, dt}_{\text{zéro}} = \int_0^T \frac{dt}{2}.$$

[1] Cette fonction peut comporter un terme constant. Dans ce cas, son carré est un des termes de la somme.

Donc enfin :

$$y_{eff}^2 = \frac{1}{T} \sum \int_0^T y_p^2 \frac{dt}{2} = \sum \frac{y_p^2}{2}.$$

D'où en développant :

$$y_{eff} = \sqrt{\frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \cdots}{2}} = \sqrt{y_{1eff}^2 + y_{2eff}^2 + y_{3eff}^2 + \cdots},$$

formule commode pour trouver la valeur efficace d'une grandeur alternative quelconque constituée (théorème de Fourier [3]) par une grandeur sinusoïdale et par des harmoniques de celle-ci.

Valeur moyenne d'une grandeur sinusoïdale. — La valeur moyenne d'une grandeur sinusoïdale, dans l'intervalle d'une période est nulle, car

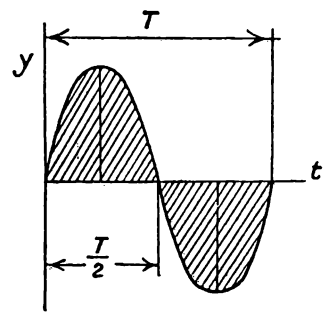


FIG. 8-11.

les aires positive et négative sont égales. On ne saurait donc parler de valeur moyenne d'une grandeur sinusoïdale que *dans l'intervalle d'une demi-période* (fig. 11). Soit y_{moy} cette grandeur :

$$y_{moy} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{\frac{T}{2}} a \sin \omega t \, dt = \frac{2a}{T} \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} = -\frac{2a}{T\omega} \left[\cos \omega \frac{T}{2} - \cos 0 \right]$$

en remplaçant ω par $\frac{2\pi}{T}$, il vient :

$$y_{moy} = -\frac{a}{\pi} [-1 - 1] = \boxed{\frac{2a}{\pi}}.$$

La valeur moyenne d'une arche de sinusoïde est égale à sa valeur maximale multipliée par $\frac{2}{\pi}$.

COURANT PSEUDOPÉRIODIQUE (CIRCUIT OSCILLANT)

8. **Courant de déplacement et force contre-électromotrice.** — Chargeons un condensateur de capacité C en reliant ses armatures aux pôles d'une pile de F. É. M. e. Nous savons que cette charge est un déplacement d'électricité positive du pôle + vers une armature, d'électricité négative du pôle — vers l'autre armature. Il y a donc dans le circuit un véritable courant électrique qui cesse dès que la D. D. P. U entre les armatures du condensateur est égale à la F. É. M. e de la pile.

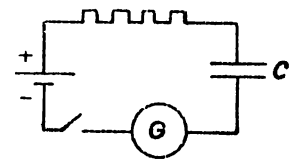


FIG. 8-12.

Au cours de la charge, il y a eu variation du champ électrique $\vec{E}$ dans le diélectrique du condensateur. Celui-ci a été le siège d'un courant de déplacement [1] de densité :

$$J = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t},$$

courant qui est le même dans les conducteurs du circuit.

Nous sommes amenés à considérer le système décrit *comme un circuit fermé*. Mais, puisque le courant décroît au cours de la charge pour s'annuler finalement, la loi d'Ohm généralisée nous oblige à dire que le circuit est le siège d'une F. C. É. M. croissante qui finit par être égale à la F. É. M. du générateur.

Si q et u désignent la charge et la D. D. P. à l'instant t au cours de la charge, la F. C. É. M. liée au champ électrique est, à l'instant t, égale et opposée à $u = q/C$.

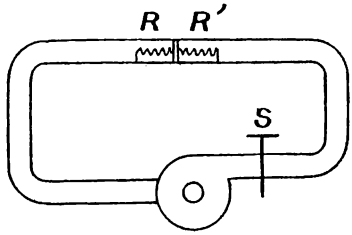


FIG. 8-13.

Le circuit électrique considéré offre une analogie avec un circuit hydraulique comportant une pompe (fig. 13) et un piston maintenu par deux ressorts R et R'. Lorsque, la pompe ayant été entraînée, on ouvre le robinet S, la différence de pression qu'elle crée entre ses deux orifices a pour effet de déplacer le piston. Mais la réaction élastique de celui-ci limite le déplacement et le mouvement du liquide cesse quand la réaction élastique par unité de surface devient égale à la différence de pression.

Par opposition à un *courant de conduction* dans les conducteurs, un *courant de déplacement* dans les diélectriques est toujours accompagné d'une *force contre-électromotrice.*

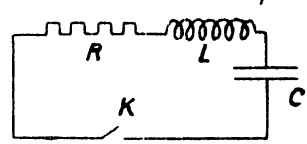


FIG. 8-14.

9. **La décharge d'un condensateur dans un circuit inductif peut être oscillante.** — Soit un condensateur de capacité C chargé d'une quantité d'électricité Q_0 (fig. 14) et brusquement fermé au moyen d'un interrupteur K sur un circuit dont la résistance totale est R et l'inductance L. En désignant, au cours de la décharge, par :

[1] V. Cours d'électricité fondamentale (même auteur).

u la D. D. P. entre armatures à l'instant t ;
q la charge du condensateur à l'instant t ;
$q + \mathrm{d}q$ la charge du condensateur à l'instant $t + \mathrm{d}t$.

Les F. É. M. agissant dans le circuit à l'instant t sont :

a) La D. D. P. $u = q/C$ qui joue le rôle de F. É. M.
b) La F. É. M. d'autoinduction $-L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$.

La loi d'Ohm généralisée nous permet d'écrire :

$$\frac{q}{C} - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Ri.$$

Avec $i = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, le signe (—) s'expliquant de la façon suivante : une F. É. M. agit dans le sens du courant, donc le signe + de $\frac{q}{C}$ doit correspondre au signe + de i, alors que q est décroissant et $\mathrm{d}q$ négatif. L'équation précédente s'écrit donc :

$$\frac{q}{C} - L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right) = R\left(-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0.$$

Comparons-la à l'équation du mouvement du galvanomètre balistique (système oscillant amorti) [6-15] :

$$K\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + a\theta = 0.$$

Ces équations sont identiques, si on assimile L à un moment d'inertie [7-14], R à un couple de frottement par unité de vitesse, $\frac{1}{C}$ à un couple élastique par unité d'angle de déviation.

Trois cas sont à distinguer :

Premier cas. L'équation caractéristique :

$$Lm^2 + Rm + \frac{1}{C} = 0$$

a des racines imaginaires, autrement dit :

$$R^2 - 4\frac{L}{C} < 0$$

(circuit faiblement résistant).

On sait que l'intégrale générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$q = Ae^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\omega t + \varphi) ;$$

d'où :

$$i = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = Ae^{-\frac{R}{2L}t}\left[\frac{R}{2L}\cos(\omega t + \varphi) + \omega\sin(\omega t + \varphi)\right].$$

Ces expressions sont celles de grandeurs *sinusoïdales amorties*, c'est-à-dire différant de la grandeur sinusoïdale par le fait que leur amplitude décroît suivant une progression géométrique. La *pseudo-pulsation* de ces grandeurs est ω ; nous rappelons que, si l'équation caractéristique est mise sous la forme canonique ($ax^2 + bx + c = 0$), on a :

$$\omega = \sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a^2}},$$

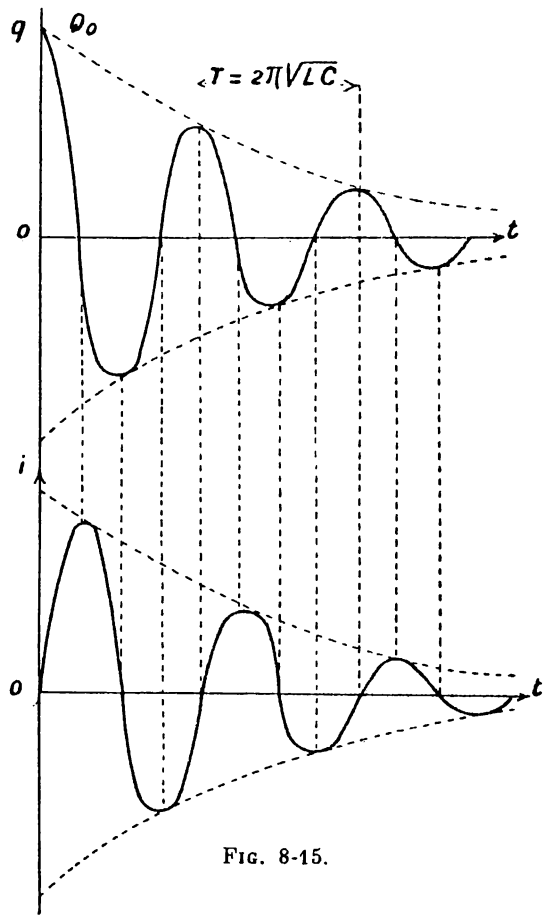


FIG. 8-15.

soit ici :

$$\omega = \sqrt{\frac{4\dfrac{L}{C} - R^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Les constantes A et φ s'obtiennent par les conditions initiales, c'est-à-dire en exprimant qu'à l'instant $t = 0$, on a $q = Q_0$ et $i = 0$ (le courant initial est nul dans un circuit doué d'inductance). Bornons-nous aux conclusions intéressantes :

a) La charge, partant de Q_0, commence par décroître, mais, au lieu de s'annuler définitivement, change de signe et subit une série d'oscillations représentées par une sinusoïde amortie, entre les valeurs correspondant à deux courbes exponentielles symétriques (fig. 15). Il en sera de même de la tension $u = \frac{q}{C}$ aux bornes du condensateur ;

b) Le courant de décharge, partant de zéro, varie suivant la même loi (sinusoïde amortie) ;

c) Le courant et la charge s'annulent à intervalles de temps qui sont égaux et dont la valeur constante :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

appelée *pseudo-période* peut s'écrire, si la résistance R est assez faible devant L pour rendre négligeable le terme $R^2/4L^2$:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL}}},$$

soit :

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}} \qquad \begin{matrix} \text{s} & \text{henrys} & \text{farads} \end{matrix}$$

(formule de Thomson).

d) Les amplitudes décroissent d'autant plus rapidement que l'exposant négatif $-\frac{R}{2L}$ de e est plus grand, autrement dit que la résistance du circuit (1) est plus grande par rapport à son inductance. C'est pourquoi le rapport $\frac{R}{2L}$ est appelé *constante d'amortissement* du circuit.

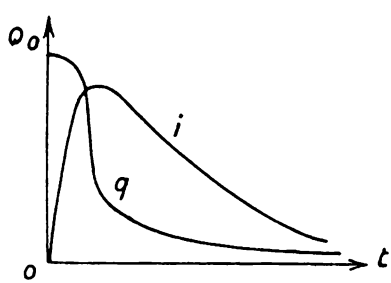


FIG. 8-16.

Deuxième cas. $R^2 - 4\frac{L}{C} > 0$. *Circuit fortement résistant.*

Si m' et m'' désignent les racines de l'équation caractéristique, on sait que l'intégrale générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$q = Ae^{m't} + Be^{m''t},$$

(1) La résistance R croît avec la fréquence à cause de « l'effet de peau » ou effet pelliculaire [6-20]. D'ailleurs, l'amortissement n'est pas uniquement dû à la perte d'énergie par effet Joule (RI^2), mais à des pertes d'énergie par effluves, conduction, hystérésis diélectrique dans le condensateur et également par rayonnement d'ondes électromagnétiques.

d'où :

$$i = -\frac{dq}{dt} = -Am'e^{m't} - Bm''e^{m''t}.$$

Nous voyons :

a) Par l'équation caractéristique, que les racines m', m'' sont négatives ;

b) Par l'expression de q, que la charge du condensateur décroît de façon continue ;

c) Par l'expression de i, que le courant de décharge *est toujours de même signe.*

Donc le courant part de zéro (parce que le circuit est doué d'inductance) et s'annule au bout d'un temps infini *sans jamais changer de sens* en présentant un seul maximum. Les courbes $q(t)$ et $i(t)$, qui peuvent être obtenues par la résolution des équations précédentes, ont donc l'allure de la figure 16.

REMARQUE. — Dans le cas particulier où l'inductance du circuit devient négligeable, l'équation différentielle devient :

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

En séparant les variables, intégrant cette équation, puis déterminant la constante d'intégration par la condition qu'à l'instant initial ($t = 0$), on a la charge initiale ($q = Q_0$), on arrive à l'expression :

$$q = Q_0 e^{\frac{-t}{CR}}$$

d'où :

$$i = -\frac{dq}{dt} = \frac{Q_0}{CR} \cdot e^{\frac{-t}{CR}} = \frac{U_0}{R} e^{\frac{-t}{CR}} = I_0 e^{\frac{-t}{CR}} \ (1).$$

On voit que le courant de décharge décroît suivant une loi exponentielle depuis la valeur $\frac{U_0}{R}$ jusqu'à zéro (fig. 17). La charge q, donc la tension u qui lui est proportionnelle suivent, d'ailleurs, la même loi de décroissance.

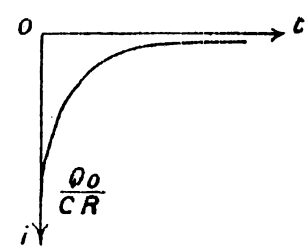


FIG. 8-17.

L'expression de la quantité d'électricité q encore possédée par le condensateur à l'instant t au cours de la décharge montre que cette décharge n'est théoriquement complète qu'au bout d'un temps infini.

Mais cherchons au bout de combien de temps la charge q du condensateur atteint une fraction déterminée de sa charge initiale Q_0. Posons : $\frac{q}{Q_0} = K$.

(1) Le courant dans une résistance de décharge [7-16] avait pour expression $I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ On note l'analogie entre $\frac{R}{L}$ et $\frac{1}{CR}$ ou bien entre CR^2 et L. La constante de temps $\frac{L}{R}$ devient ici $\frac{CR^2}{R} = CR$ (dimensions égales à un temps).

Nous obtenons :

$$K = e^{-\frac{t}{CR}} \qquad \text{ou} \qquad t = CR \ln \frac{1}{K}.$$

En réalité, la décharge sera toujours très rapide. Cela tient à ce que le produit CR est toujours très petit.

Par exemple, si nous prenons $K = 0{,}001$, $R = 1\ \Omega$, $C = 1\ \mu F$, nous obtenons :

$$t = 10^{-6} \times \ln 1\,000 = 10^{-6} \times 6{,}9 = \frac{1}{140\,000}.$$

Donc, au bout de $\frac{1}{140\,000}$ de seconde, la charge du condensateur sera 1 000 fois plus petite que la charge initiale Q_0.

En définitive :

1° Dans le cas d'un circuit dont la résistance est élevée par rapport à l'inductance, le courant de décharge ne change pas de sens ; il n'oscille pas ; on dit alors que le circuit est *apériodique.*

La limite de cette apériodicité correspond au cas où $R^2 = \frac{4L}{C}$; le circuit est alors *apériodique critique.* On démontre que ce cas correspond à la décharge la plus rapide.

Ce cas ne présente aucun intérêt pratique (1).

2° Lorsque le circuit possède une inductance de valeur élevée par rapport à sa résistance, la décharge est oscillatoire ; le circuit est dit *oscillant.*

Ce cas est extrêmement intéressant et particulièrement dans son application à la radiotechnique.

On peut l'expliquer physiquement de la façon suivante : quand le condensateur veut se décharger dans la bobine, celle-ci, par son inductance, s'oppose à cette décharge ; mais, le courant une fois établi, l'inductance tend à le prolonger : le résultat est que le condensateur se charge en sens contraire, d'où une décharge de sens contraire à la précédente, et ainsi de suite.

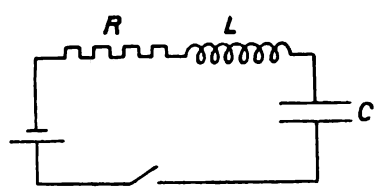


FIG. 8-18.

10. La charge du condensateur en circuit inductif (2) peut être oscillante. — Soit un générateur de F. É. M. E inclus dans un circuit comportant en série une résistance R, une inductance L et une capacité C

(1) Sauf dans l'aimantation par le courant de décharge d'une batterie de condensateurs. Le circuit de décharge doit évidemment être apériodique et il est avantageux, pour accroître la rapidité et l'amplitude de la décharge, de se rapprocher de l'apériodicité critique.

(2) C'est-à-dire doué d'inductance.

(fig. 18). Pendant la période de charge du condensateur, la loi d'Ohm généralisée nous donne l'équation :

$$E - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = R\frac{dq}{dt} \quad \left(\text{avec } i = \frac{dq}{dt}\right)$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E.$$

Cette équation ne diffère de celle qui est relative à la décharge que par la présence d'un second membre. On sait que, dans ce cas, on détermine d'abord l'intégrale générale de l'équation sans second membre, puis on lui ajoute une intégrale quelconque de l'équation avec second membre. Celle que nous ajouterons ici correspondra au cas où q = constante, soit :

$$\frac{q}{C} = E\,; \qquad q = CE.$$

Nous aurons donc :

Premier cas. Circuit oscillant : $R^2 - \frac{4L}{C} < 0$:

$$q = CE + Ae^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$i = Ae^{-\frac{R}{2L}t}\left[\frac{R}{2L}\cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \varphi)\right].$$

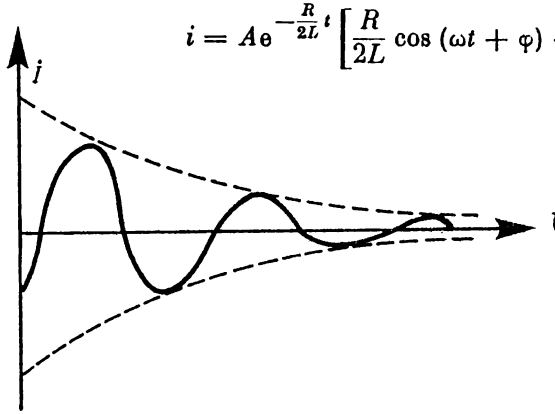


FIG. 8-19.

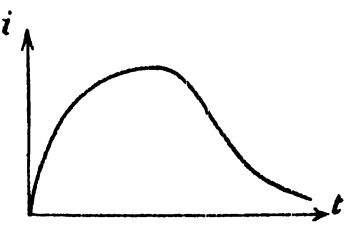


FIG. 8-20.

Cette équation semblable à celle du régime oscillatoire de décharge nous conduit au graphe ci-dessus (fig. 19). La charge est oscillante.

Deuxième cas. Circuit apériodique : $R^2 - 4\frac{L}{C} > 0$:

$$q = CE + Ae^{m't} + Be^{m''t}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = Am'e^{m't} + Bm''e^{m''t}.$$

Le graphique de la figure 20 donne la variation du courant pendant la charge.

Cas particulier. — L'inductance du circuit est nulle. L'équation du circuit se réduit à :

$$E - \frac{q}{C} = Ri \qquad \text{ou} \qquad E - \frac{q}{C} = R\frac{dq}{dt}$$

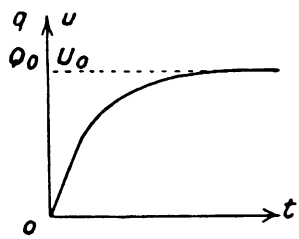


FIG. 8-21.

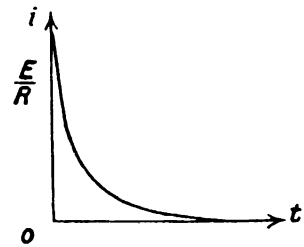


FIG. 8-22.

dont l'intégration fournit :

$$\ln\left(\frac{CE - q}{A}\right) = -\frac{t}{CR} \qquad \text{soit} \qquad CE - q = e^{-t/CR} \cdot A$$

A = constante d'intégration obtenue en exprimant que pour $t = 0$ on a $q = 0$:

$$CE = A \qquad \text{d'où} \qquad CE - q = CE\, e^{-t/CR}$$

et :

$$q = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right).$$

D'où :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{CR}}.$$

Les graphiques $q(t)$ et $i(t)$ sont donnés par les figures 21 et 22.

11. **Décharge d'un condensateur à travers son diélectrique.** — Cette décharge se produit toujours, car le diélectrique n'est pas un isolant parfait. Sa résistance dite *de fuite* (condensateur-plan) est :

$$R = \rho \frac{e}{S} = \frac{\rho\varepsilon}{C} \qquad \left(C = \frac{\varepsilon S}{e} \quad \text{d'où} \quad \frac{e}{S} = \frac{\varepsilon}{C}\right)$$

(ε désignant la permittivité absolue [$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$], S la surface des armatures, e l'épaisseur du diélectrique).

On voit que la constante de temps $\theta = CR = \varepsilon\rho$ est indépendante de la forme du condensateur. Il en résulte que, pour qu'un condensateur garde sa charge pendant un temps appréciable, il doit avoir un diélectrique de *très grande résistivité.*

Avec $\varepsilon_r = 4$ soit $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r = 8{,}85 \times 10^{-12} \times 4$, si on veut $\theta = 60$ secondes, il faut avoir une résistivité $\rho = \dfrac{60}{8{,}85 \times 10^{-12} \times 4} \approx 2 \times 10^{12}\ \Omega \cdot \text{m}^2/\text{m}$.

Il n'y a que les isolants de bonne qualité qui atteignent ces valeurs élevées. Avec des corps exceptionnels comme l'*ambre*, la constante de temps atteint 10 jours. La déperdition par l'isolant solide devient négligeable ; elle s'effectue uniquement par l'air toujours plus ou moins ionisé.

12. **Analogies mécaniques : l'inertie, l'élasticité, la viscosité, dans les circuits électriques.** — Le tableau ci-après met en évidence de remarquables analogies :

Dans la plupart des phénomènes mécaniques, trois propriétés fondamentales de la matière entrent en jeu :

1° Inertie.	2° Élasticité.	3° Viscosité.

Qualités par laquelle la matière réagit à :

Un changement de vitesse.	Un changement de forme.	Une vitesse.

Les forces :

d'inertie dépendent de la variation de vitesse		*élastiques* dépendent du déplacement (x = élongation)		*de viscosité* dépendent de la vitesse	
$m\frac{dv}{dt}$	$L\frac{di}{dt}$	Kx	$\frac{1}{C}\times q$	$K'v$	Ri

Les énergies mises en jeu par ces forces deviennent :

Accroissement d'énergie cinétique		Accroissement d'énergie potentielle élastique		Chaleur	
$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}Li^2$	$\frac{1}{2}Fx=\frac{1}{2}Kx^2$	$\frac{1}{2}Uq=\frac{1}{2}\frac{1}{C}q^2$	$K'v^2$ (frottement)	Ri^2 (joule)

Ces analogies que nous avons fait remarquer [9] dans les équations qui traduisent respectivement la décharge oscillante d'un condensateur (variation de la quantité d'électricité au cours de la décharge) et le mouvement oscillatoire amorti d'un pendule (variation de l'élongation au cours de ses oscillations).

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0$$

et :

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}+b\frac{d\theta}{dt}+a\theta=0$$

se retrouvent de même dans les périodes d'oscillation sans amortissements :

$$\text{Pendule : } T=2\pi\sqrt{\frac{\text{Moment d'inertie}}{\text{Couple de rappel par radian}}}=2\pi\sqrt{\frac{J}{a}}.$$

$$\text{Circuit électrique : } T=2\pi\sqrt{\frac{L}{\frac{1}{C}}}=2\pi\sqrt{LC}. \qquad [9]$$

On sait d'ailleurs que, suivant que les forces d'amortissement fluide sont plus ou moins importantes, autrement dit suivant que b^2 est plus ou moins grand par rapport à $4aJ$, le mouvement du pendule sera apériodique ou périodique. De même, suivant que R^2 sera inférieur ou supérieur à $4\frac{L}{C}$, la décharge du condensateur sera pseudopériodique ou apériodique.

13. **Condition d'entretien des oscillations.** — De même que, dans un ressort, il y a échange continuel entre son énergie potentielle élastique $\frac{1}{2}Kx^2$ et s on énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2$, de même, dans le circuit électrique oscillant, il y a échange continuel entre l'énergie électrostatique $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{C}q^2$ localisée dans le champ électrique du condensateur et l'énergie électrocinétique $\frac{1}{2}Li^2$ localisée dans le champ magnétique des conducteurs du circuit.

a) *S'il n'y a pas de résistance en circuit*, la somme de ces deux énergies est constante. En effet, l'équation qui régit le circuit [9] est alors :

$$\frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = 0,$$

avec :

$$i = -\frac{dq}{dt}.$$

Multiplions par i, nous obtenons :

$$\frac{q}{C}\left(-\frac{dq}{dt}\right) - Li\frac{di}{dt} = 0$$

ou :

$$\frac{1}{C}q\frac{dq}{dt} + Li\frac{di}{dt} = 0.$$

D'où, en intégrant de zéro à t :

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2 = \text{constante}.$$

b) *S'il y a une résistance en circuit*, une fraction de l'énergie passe, à chaque période, sous la forme calorifique. Donc, si l'on veut réaliser des oscillations électriques *entretenues*, c'est-à-dire qui ne s'éteignent pas, il faudra fournir au circuit, à chaque période, à l'aide d'une source auxiliaire, une énergie égale à celle qui se transforme en chaleur.

F. É. M. ET COURANT ÉLECTRIQUE SINUSOÏDAUX

14. **Comment on peut créer une F. É. M. sinusoïdale.** — Il est facile d'engendrer une F. É. M. sinusoïdale :

1° *Soit au moyen d'un champ uniforme.* — Considérons une spire $ABCD$ représentée par sa projection BC (fig. 23). Nous supposerons, par exemple, qu'elle est constituée par un fil de cuivre de forme rectangulaire, susceptible de tourner autour d'un axe ZZ' dont la trace est en O sur le plan de la figure.

Cette spire de surface S, placée dans un *champ uniforme* d'induction B occupant à l'origine des temps, la position qui correspond au flux embrassé

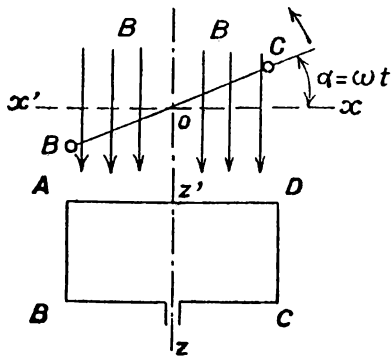


FIG. 8-23.

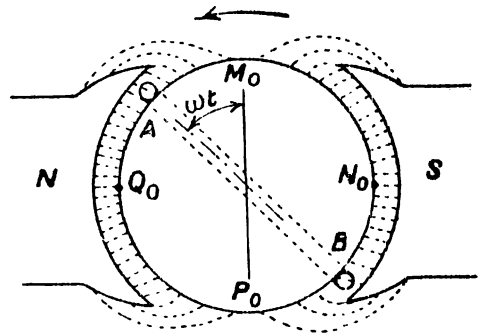


FIG. 8-24.

maximal, est animée d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω. Embrassant dès lors un flux variable, elle est le siège d'une F. É. M. induite e, que nous allons exprimer. Nous avons :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt};$$

Φ = flux total embrassé à l'instant t.

Or, à l'instant t, le cadre BC a tourné de l'angle $\alpha = \omega t$ et :

$$\Phi = BS \cos \alpha = BS \cos \omega t.$$

D'où :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t.$$

On voit que la F. É. M. est sinusoïdale ; sa valeur maximale est :

$$E_m = BS\omega$$

et nous pourrons l'écrire :

$$e = E_m \sin \omega t,$$

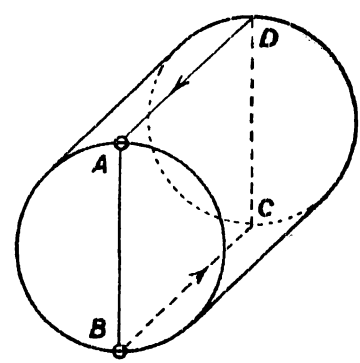


FIG. 8-25.

résultat remarquable que nous énoncerons de la façon suivante :

Un cadre tournant d'un mouvement uniforme dans un champ uniforme est le siège d'une force électromotrice sinusoïdale.

2° *Soit au moyen d'une induction B à répartition sinusoïdale.* — Un cylindre est disposé (fig. 24 et 25) entre les pôles N et S d'un électroaimant. L'induction dans l'entrefer sera dite *à répartition sinusoïdale* si la courbe de cette induction en fonction de la distance du point

considéré à un point M_0 origine, distance mesurée sur la périphérie du cylindre, est une sinusoïde (fig. 26) :

Plaçons sur ce cylindre un cadre $ABCD$ dont la largeur est égale au diamètre du cylindre et faisons-le tourner autour de son axe d'un mouvement uniforme. Si nous désignons par l la longueur des *portions actives* AD, BC du cadre (celles qui coupent des lignes d'induction), v la vitesse

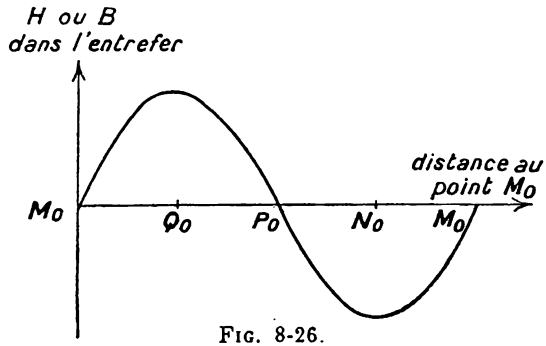


FIG. 8-26.

tangentielle de ces portions, nous avons, pour toute position du cadre, création dans celui-ci d'une F. É. M. [18-6] :

$$e = 2Blv,$$

car nous avons deux portions actives en série et celles-ci, soumises à des inductions égales et de signe contraire sont le siège de F. É. M. égales qui s'ajoutent (fig. 25).

Or l'induction B est à répartition sinusoïdale :

$$B = B_m \sin \alpha = B_m \sin \omega t$$

(ω = vitesse angulaire du cylindre).

Donc la F. É. M. induite dans le cadre aura pour expression :

$$e = 2lv \times B_m \sin \omega t = E_m \sin \omega t,$$

en désignant par E_m la valeur maximale $E_m = 2B_m lv$.

Un cadre tournant d'un mouvement uniforme dans une induction à répartition sinusoïdale est le siège d'une F. É. M. sinusoïdale.

Comme il est très difficile et très coûteux de réaliser une induction uniforme assez intense dans un espace étendu, c'est ce deuxième mode de production d'une F. É. M. sinusoïdale qui sera toujours appliqué dans les *alternateurs* (générateurs à courant alternatif).

REMARQUE. — On peut encore engendrer une F.E.M. sinusoïdale par induction mutuelle de deux bobines dont l'une est soumise à une tension sinusoïdale. Tel est le principe des *transformateurs*.

15. **Comment on produit un courant alternatif sinusoïdal.** — Un courant électrique est dit alternatif quand il change périodiquement de grandeur et de sens, c'est-à-dire lorsqu'il varie suivant une loi périodique.

Parmi les courants alternatifs, celui dont l'importance est particulièrement grande — nous en donnerons plus loin la raison — c'est le *courant alternatif sinusoïdal.* Il est facile de le produire.

Relions, en effet, par l'intermédiaire de bagues (fig. 27) les extrémités du cadre *ABCD* à une résistance *R* que nous supposerons dépourvue d'inductance (lampe à incandescence par exemple). A tout instant, la seule F. É. M. en circuit est celle qui est engendrée par induction dans le cadre et le courant a pour expression :

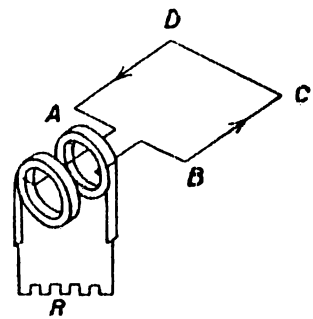


FIG. 8-27.

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t$$

$$\left(\text{en posant } I_m = \frac{E_m}{R}\right).$$

La résistance *R* est donc traversée par un courant alternatif sinusoïdal.

Propriétés des courants alternatifs

Nous nous proposons d'étudier ce que deviennent les propriétés du courant électrique que nous avons déjà envisagées, lorsque ce courant est alternatif.

16. **Propriétés calorifiques. Définition de la valeur efficace du courant.** — *Un courant alternatif, comme un courant continu, échauffe les conducteurs.*

Soit *i* l'intensité à l'instant *t* d'un courant alternatif passant dans une résistance *R*. Dans un intervalle de temps d*t* infiniment petit, à partir de l'instant *t*, nous pouvons considérer *i* comme constant et écrire (loi de Joule) :

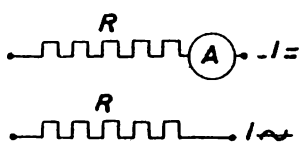


FIG. 8-28.

Énergie devenue chaleur pendant le temps d*t* :

$$dW = Ri^2\, dt.$$

Quand le courant change de sens, il continue à céder de l'énergie à la résistance *R*, car l'effet Joule ne dépend pas du sens du courant.

C'est ce qu'il est très facile de constater : on fait, aussi bien, briller une lampe électrique avec un courant alternatif qu'avec un courant continu.

Valeur efficace du courant. Possibilité de mesure. — Soient deux résistances *R identiques.* L'une est parcourue par un courant *continu* d'intensité *I* mesuré par un ampèremètre (fig. 28). L'autre est parcourue par un courant *alternatif.* Lorsque nous aurons réglé ce courant alternatif de façon telle que les deux résistances *R* identiques soient identiquement échauffées par les deux courants, nous dirons : *la valeur efficace* du courant alternatif est égale à *I.*

Dans le même temps, les deux courants ont donc apporté la même énergie au même conducteur. Comme les phénomènes du courant alternatif se reproduisent identiquement à chaque période, nous sommes conduits à la définition suivante :

L'intensité efficace I_{eff} d'un courant alternatif est l'intensité du courant continu qui, pendant une période T, cède à une même résistance R, la même quantité de chaleur que le courant alternatif. D'où :

$$RI_{eff}^2\, T = \int_0^T Ri^2\, dt \qquad \text{d'où} \qquad I_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2\, dt.$$

De cette définition, nous déduisons qu'un *ampèremètre thermique* dont la déviation ne dépend que de l'échauffement d'un fil, indique, après étalonnage à l'aide de courants continus, la valeur efficace des courants alternatifs qui le traversent.

Les propriétés calorifiques du courant électrique sont également utilisées dans les appareils dits *à thermocouple* (fig. 29), dans lesquels l'élément chauffant élève, dans une perle de verre, la température de la soudure chaude d'un thermocouple. Celui-ci alimente un galvanomètre magnétoélectrique *G*.

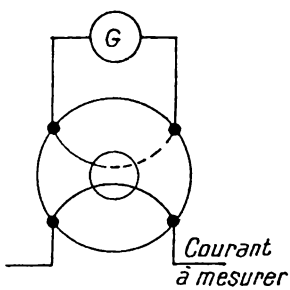


FIG. 8-29.

En désignant par $\Delta\theta$ l'élévation de température de la soudure chaude et I_{eff} l'intensité efficace du courant qui parcourt l'élément chauffant, on a :

$$\Delta\theta = K\, I_{eff}^2 \qquad (K = \text{constante})$$

et la déviation δ du galvanomètre s'exprime par :

$$\delta = K'\Delta\theta = K''I_{eff}^2$$

K' et K'' désignant des constantes. Les déviations du galvanomètre sont fonction de I suivant la même loi que dans l'ampèremètre thermique.

D'une façon générale, si, dans un appareil dont l'équipage mobile a une période grande par rapport à la période du courant, cet équipage mobile est soumis à un couple proportionnel au carré *du courant*, il prendra une position d'équilibre correspondant à la valeur moyenne du couple :

$$C_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T c\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T Ki^2\, dt = KI_{eff}^2$$

(c = couple instantané, K = coefficient de proportionnalité) ;
c'est dire que l'appareil étalonné en courant continu indiquera la valeur efficace du courant alternatif par lequel il sera traversé.

Expression. — De l'expression mathématique, il résulte que la valeur efficace du courant n'est autre que la *valeur efficace* de ce courant en tant que grandeur périodique. Si ce courant est *sinusoïdal*, nous aurons donc :

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, I_m$$

17. **Propriétés magnétiques.** — Nous avons montré que les effets magnétiques des courants continus se manifestaient par des forces exercées, soit sur des aimants permanents, soit sur des pièces de fer doux, soit sur d'autres courants. Que deviennent ces effets dans le cas des courants alternatifs ?

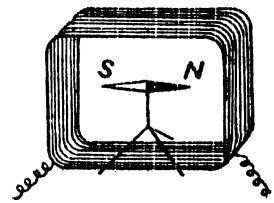


FIG. 8-30.

1° *Sur un aimant permanent : action de médiocre intérêt.* — Considérons une bobine (fig 30) au centre de laquelle est disposée sur un pivot une aiguille aimantée ; si cette bobine est traversée par un courant alternatif, l'induction qu'elle engendre change de sens deux fois par période. Il en sera de même du couple qui agit sur l'aiguille.

Si celle-ci n'est douée que d'une très faible inertie, elle oscille autour de sa position d'équilibre (plan de la spire) avec une fréquence égale à la fréquence du courant alternatif. Dans le cas contraire, elle ne subit pas de déviation sensible.

Réciproquement d'ailleurs, si l'aimant permanent (ici l'aiguille aimantée) est fixe et le cadre mobile, celui-ci, suivant son inertie, oscille en suivant les variations du courant ou bien demeure immobile sans déviation.

En définitive, un appareil à aimant mobile, ou à cadre mobile [2-11] *ne peut pas servir* à la mesure de courants ou de tensions alternatives.

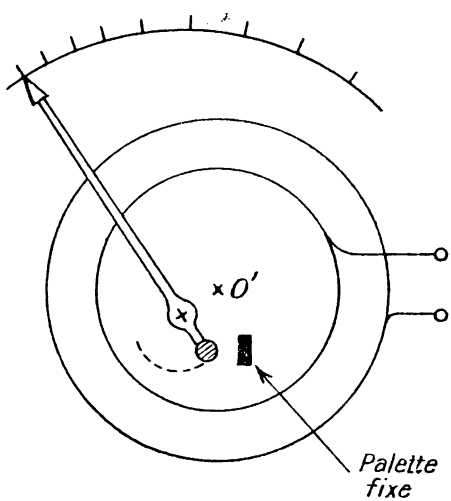


FIG. 8-31.

C'est seulement dans le cas très particulier où, par une extrême réduction de l'inertie de l'aimant mobile, on peut enregistrer, par les déviations de cet aimant, la valeur *instantanée* du courant (principe de l'oscillographe Blondel) que l'action magnétique d'un courant alternatif sur un aimant permanent est utilisable.

2° *Sur une pièce de fer doux. Emploi des appareils ferromagnétiques.* — Nous avons montré que la force s'exerçant entre les palettes fixe et mobile d'un appareil ferromagnétique est toujours répulsive *quel que soit le sens du courant dans la bobine* (1). Un appareil à fer mobile est donc utilisable en courant alternatif.

(1) Cela explique le ronflement des compteurs, disjoncteurs, transformateurs, etc... et en général de tous les appareils à courants alternatifs comportant des circuits magnétiques feuilletés. La répulsion mutuelle des lames de tôles variant périodiquement à la fréquence $2f$ (f = fréquence du courant alternatif), ces lames vibrent en émettant un ronflement et avec une amplitude d'autant plus grande que ces lames sont plus mal serrées. Une autre cause importante de ronflement est la magnétostriction (variation d'épaisseur quand l'induction augmente).

La force répulsive F s'exerçant entre les deux palettes sera à tout instant proportionnelle à l'aimantation de l'une et de l'autre, donc à B^2 (B = induction de chaque pièce de fer doux).

Si B est proportionnel au champ H dû à la bobine (pièces non saturées), comme H est proportionnel à i (position des palettes immuable), on a F proportionnel à i^2.

En réalité, par le fait que le fer mobile est soumis à l'hystérésis, aux courants de Foucault et que sa perméabilité n'est pas constante, les déviations de l'instrument ne sont proportionnelles ni à la valeur moyenne ni à la valeur efficace du courant. Elles sont généralement intermédiaires entre ces valeurs. On gradue le cadran de ces appareils point par point par comparaison avec un appareil thermique ou électrodynamique, mais ces appareils ne sont utilisables que pour des courants de même forme et de même fréquence que les courants d'étalonnage.

La figure 31 représente un appareil ferromagnétique à deux palettes. Les figures 31 et 32

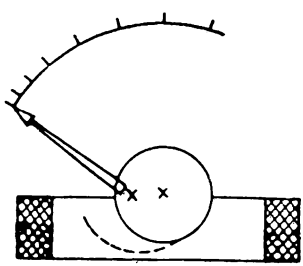


FIG. 8-32.

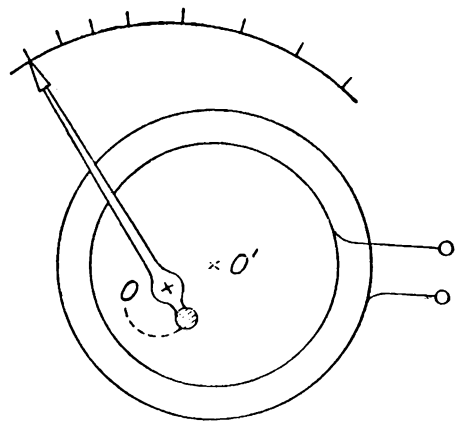


FIG. 8-33.

donnent le schéma de deux autres types d'appareils, utilisant le fait que le fer se déplace toujours vers les zones où l'induction de la bobine est la plus intense (intérieur de la bobine et, à l'intérieur de la bobine, face interne de celle-ci).

3° *Sur un autre courant. Emploi des appareils électrodynamiques.* — Nous avons établi [2-2] que le couple exercé par le cadre fixe d'un électrodynamomètre sur le cadre mobile ramené toujours dans la même position est de la forme :

$$C = Ki^2$$

(K = constante caractéristique de l'appareil).

Donc, un électrodynamomètre permet, *avec la même constante* qu'en *courant continu*, la mesure des valeurs efficaces des courants alternatifs. S'il s'agit d'un appareil industriel étalonné en courant continu, il indique, branché sur un courant alternatif, la valeur efficace de celui-ci.

18. Utilisation de redresseurs. — En associant un ou plusieurs redresseurs à un galvanomètre magnétoélectrique, on peut ramener la mesure d'un courant alternatif à la mesure d'un courant continu.

Les figures 34 et 35 donnent les montages généralement utilisés. Tel est le principe des appareils dits *à redresseurs* qui servent en courant continu (galvanomètre traversé directement ou monté sur shunt) ou en courant alternatif moyennant un commutateur.

Un redresseur opposant une résistance dite *directe* R_d au courant dans un sens

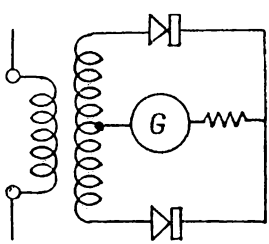


FIG. 8-34.

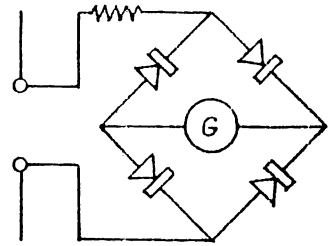


FIG. 8-35.

et une résistance *inverse* R_i dans le sens contraire, le courant *moyen* traversant le galvanomètre s'exprime par :

$$i = \frac{2}{\pi}\left(\frac{E_m}{R + R_d} - \frac{E_m}{R + R_i}\right) ; \text{ avec } R_i \gg R_d$$

e = F. É. M. alternative (proportionnelle au courant à mesurer) appliquée au circuit du galvanomètre, R = résistance de celui-ci.

Comme la courbe $i(U)$ du courant à travers le redresseur en fonction de la tension U entre ses bornes est pratiquement linéaire, le courant redressé est proportionnel à la *valeur moyenne* du courant alternatif à mesurer.

REMARQUE. — Nous avons montré (1) qu'il n'y a aucune différence de principe entre un voltmètre et un ampèremètre. On pourra donc mesurer des tensions alternatives à l'aide de voltmètres thermiques, ferromagnétiques, électrodynamiques, à condition toutefois que la loi d'Ohm simple ($u = ri$) soit applicable entre le courant efficace qui les traverse et la tension efficace entre leurs bornes. Nous démontrerons plus loin [2-6] que cette condition est réalisée quand l'appareil est dépourvu d'inductance et de capacité.

Nous donnons ci-contre le tableau-résumé des ampèremètres et voltmètres.

19. Propriétés chimiques. — Nous savons que les décompositions électrolytiques s'effectuent dans un sens déterminé (le métal descend toujours le courant). Dès lors, avant que les produits de la décomposition apparus au cours d'une demi-période aient eu le temps de se dégager ou de se déposer, ils entrent en réaction plus ou moins complète avec les éléments de signe contraire libérés pendant la demi-période suivante. Les phénomènes sont symétriques aux deux électrodes où apparaît un mélange des deux produits normaux de décomposition. Le courant alternatif est donc inutilisable dans les opérations électrochimiques et dans la charge des accumulateurs.

(1) Voir du même auteur, *Électricité fondamentale*.

20. Tableau-résumé des appareils de mesure (ampèremètres et voltmètres).

Types d'appareils	Courant	Consommation propre	Sensibilité aux champs extérieurs	Influence de la fréquence	Influence de la forme	Précision	Robustesse	Observations
A cadre mobile ou magnétoélectrique	Continu	Faible	Faible			Grande	Grande	Les meilleurs en courant continu.
A fer doux ou ferromagnétique	Continu et alternatif	3 à 4 fois celle des précédents	Grande	Grande	Très grande	Moyenne (hystérésis courants de Foucault)	Grande. Supportant 5 fois courant maximum	Simple. Peu coûteux. Très utilisés en C. A. L'étalonnage en C. C. peut différer de l'étalonnage en C. A.
hermiques ou à thermocouple	Continu et alternatif	Très grande	Nulle	Exacts jusqu'à 10^6 Hz	Nulle	Assez grande (modifications propriétés fil par charge prolongée)	Faible	Étalonnés en C. C. Fragiles. Conviennent en H. F. et quand le courant est non sinusoïdal. Shunts en B. F.
redresseurs.....	Continu et alternatif	Grande chute de tension propre	Faible	Faible en fréquence acoustique $f < 10^4$ Hz	Grande	Moindre en C. A. qu'en C. C.	Grande	Ne conviennent pas pour forts courants ou faibles tensions. Étalonnage différent en C. C. et C. A. Sensibles à la forme de l'onde.
induction	Alternatif	Grande	Grande	Grande	Grande	Faible (échauffement du disque)	Grande	Peu employés. Trop peu précis. Appareils de tableau.
ectrodynamiques	Continu et alternatif	Moyenne	Grande	Faible	Grande	Grande à l'abri des champs extérieurs	Grande	Les plus précis et les plus coûteux en C. A. Mesures de précision. Utilisés en B. F.

F. É. M. et courants non sinusoïdaux

21. **Les grandeurs électriques alternatives ne renferment que des harmoniques impairs.** — Comme les pôles N et S d'un alternateur sont identiques, les deux demi-ondes de la courbe de F. É. M. sont identiques au signe près. C'est dire que, par un glissement OA d'une demi-période, les demi-ondes positives viennent occuper la position symétrique des demi-ondes négatives.

Les figures 36 et 37 montrent clairement que, pour qu'il en soit ainsi, il faut que la longueur OA soit égale à un nombre *impair* de demi-longueurs d'onde. Dans ces

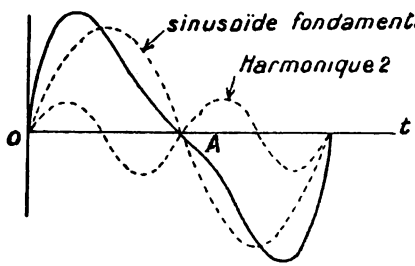


FIG. 8-36.

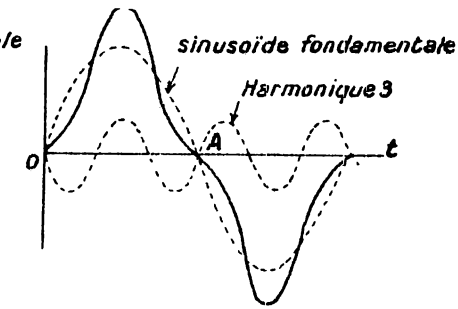


FIG. 8-37.

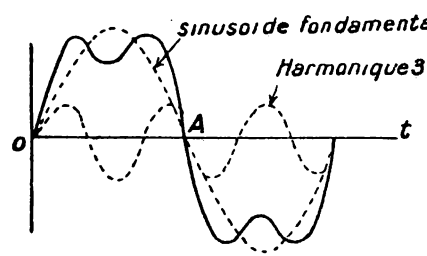


FIG. 8-38.

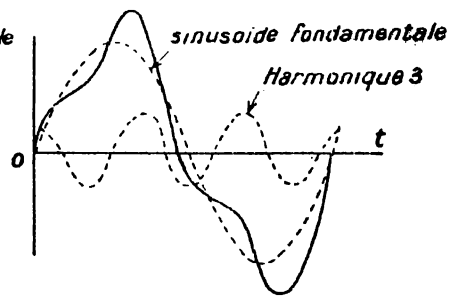


FIG. 8-39.

conditions, seuls des harmoniques *impairs* figurent très généralement dans les graphes de grandeurs électriques alternatives.

Dès lors, l'expression d'une tension électrique *non sinusoïdale* est :

$$u = U_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_1) + U_3\sqrt{2}\sin(3\omega t + \varphi_3) + U_5\sqrt{2}\sin(5\omega t + \varphi_5) + \ldots$$

Comme l'amplitude des harmoniques décroît le plus souvent quand leur degré s'élève, c'est l'harmonique 3 qui déforme en général de la façon la plus sensible le graphe d'une grandeur électrique alternative.

En définitive, les formes d'onde que l'on rencontre dans la pratique se rapprochent beaucoup des trois formes caractéristiques données par les figures 37 à 39 :

37, Un maximum positif de l'harmonique 3 coïncide avec un maximum positif de la sinusoïde fondamentale ;

38, Un maximum négatif de l'harmonique 3 coïncide avec un maximum positif de la sinusoïde fondamentale ;

39, Un zéro de l'harmonique 3 coïncide avec un maximum de la sinusoïde fondamentale.

On rapporte une grandeur électrique quelconque à une grandeur sinusoïdale par les définitions suivantes :

Sinusoïde équivalente à une fonction périodique quelconque : fonction sinusoïdale de même période et de même valeur efficace que la fonction considérée.

Si on superpose la sinusoïde équivalente à la courbe représentant la fonction donnée, on trouve des différences dans les ordonnées. Le maximum de ces différences rapporté à l'ordonnée maximale de la sinusoïde équivalente est le *coefficient de déformation* de la courbe donnée.

Facteur de forme : rapport $\dfrac{\text{valeur efficace}}{\text{valeur moyenne}}$ $\left(\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\dfrac{2}{\pi}} = 1{,}11 \text{ pour la sinusoïde}\right)$.

Facteur de crête : rapport $\dfrac{\text{valeur maximale}}{\text{valeur efficace}}$ ($\sqrt{2}$ pour la sinusoïde).

Les courbes de F. É. M. qui dépendent de la construction des alternateurs diffèrent peu, en général, de la sinusoïde. Mais les courbes *de courant* qui dépendent des récepteurs installés sur le réseau renferment souvent un harmonique 3 assez important.

22. **Inconvénients des harmoniques.** — 1° *Dans les réseaux* ils donnent lieu à des perturbations téléphoniques puisqu'ils atteignent les fréquences musicales. De plus, ils causent des surtensions en cas d'amplification par résonance [2-10].

2° *Dans les machines :*

a) Ils sont une cause de pertes parfois importantes dans le fer et dans le cuivre par courants de Foucault [1-16].

b) Ils accroissent les champs électriques et les contraintes diélectriques dans les isolants parce que la tension de crête est plus élevée pour une onde déformée pointue que pour une onde sinusoïdale de même valeur efficace.

c) Dans les machines asynchrones, les flux glissants harmoniques [tome II] développent des couples parasites sur l'arbre.

23. **Étude du fonctionnement d'un réseau alimenté par une tension non sinusoïdale.** — L'analyse harmonique de cette tension ayant été faite, on étudie séparément l'effet de chaque harmonique, puis on superpose les courants obtenus.

Mais ceci suppose que le réseau est *linéaire* (R, L, C constants). Dans le cas contraire aucune relation simple n'existe entre les harmoniques de même rang de la tension et du courant.

Il faut retenir que :

Le carré de la valeur efficace d'une grandeur périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de chacun des harmoniques. Dans l'exemple précédent :

$$U^2 = U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + \cdots$$

24. **Courants alternatifs industriels. Symboles conventionnels.** — Les courants alternatifs industriels sont *sensiblement sinusoïdaux*, c'est-à-dire renferment peu d'harmoniques. C'est pourquoi, dans l'étude qui va suivre, nous supposerons que les F. É. M., les tensions et les courants sont *rigoureusement sinusoïdaux*. Nous nous écarterons très peu de la réalité industrielle.

D'autre part, suivant les conventions de la Commission Électrotechnique internationale relatives aux grandeurs alternatives :

les valeurs instantanées seront représentées par des lettres minuscules ;

les valeurs maximales seront représentées par des lettres majuscules et l'indice m ;

les valeurs efficaces seront représentées par des lettres majuscules sans indices ;

par exemple la valeur instantanée d'un courant alternatif sera représentée par i, sa valeur maximale par I_m (1), sa valeur efficace par I (2).

Quand on donne *l'intensité* d'un courant alternatif, il s'agit, sauf spécification contraire, de la valeur *efficace* de ce courant.

Une *tension* alternative est exprimée en valeur efficace dans les problèmes industriels les plus courants et en valeur efficace ou maximale, suivant les cas, dans les problèmes d'isolation.

Une *induction* magnétique et un *champ* magnétique sont toujours exprimés *en valeur maximale* et non en valeur efficace.

25. **Les courants alternatifs et la théorie électronique.** — Nous avons dit que le courant électrique était dû, dans la théorie électronique, à une vitesse supplémentaire (d'ailleurs très faible) acquise dans le sens inverse du sens conventionnel du courant par les électrons qui, dans un métal, sont mobiles dans les espaces interatomiques, et y sont normalement animés de vitesses énormes (de l'ordre de 1 000 km par seconde) dans tous les sens.

Quand un métal est parcouru par un courant alternatif, c'est qu'à ces mouvements désordonnés et spontanés dont chaque électron est animé, est venu se superposer un mouvement oscillatoire, toutes ces vibrations électroniques étant d'ailleurs synchrones et en phase.

(1) Ou par $\hat{I}$.

(2) Ou par I_{eff}.

CHAPITRE 9

CIRCUITS A COURANTS ALTERNATIFS

1. Un circuit à courant alternatif est en oscillation forcée. — Soit une F. É. M. sinusoïdale $e = E_m \sin \omega t$ appliquée à un circuit électrique. Dans le cas général, ce circuit possède de la résistance, de l'inductance (puisqu'un simple fil tendu est doué d'inductance) et de la capacité (puisqu'il suffit d'un espace d'air entre deux portions conductrices pour former le diélectrique et les armatures d'un condensateur). Il répond au schéma de la figure 1; ce schéma diffère seulement de celui qui se rapporte à la charge d'un condensateur dans un circuit inductif (fig. 7-10) par la substitution d'un alternateur au générateur à courant continu.

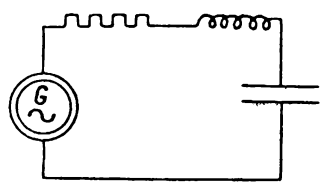


FIG. 9-1.

La loi d'Ohm généralisée appliquée à ce circuit se traduira par la même équation différentielle, mais en substituant, à la F. É. M. constante E appliquée au circuit, la F. É. M. sinusoïdale $e = E_m \sin \omega t$.

$$\underset{\text{F. É. M. appliquée}}{E_m \sin \omega t} - \underset{\substack{\text{F. É. M.}\\ \text{d'autoinduction}}}{L \frac{di}{dt}} - \underset{\substack{\text{F. É. M.}\\ \text{de capacité}}}{\frac{q}{C}} = \underset{\substack{\text{chute}\\ \text{par résistance}}}{Ri}$$

ou :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_m \sin \omega t \qquad \left(\text{avec } i = \frac{dq}{dt}\right).$$

L'analogie déjà signalée entre un circuit électrique et un système mécanique oscillant nous conduit à écrire, en regard de l'équation précédente :

$$\underset{\substack{\text{couple}\\ \text{d'inertie}}}{J \frac{d^2\theta}{dt^2}} + \underset{\substack{\text{couple}\\ \text{d'amortissement}}}{b \frac{d\theta}{dt}} + \underset{\substack{\text{couple}\\ \text{élastique}\\ \text{de rappel}}}{a\theta} = \underset{\substack{\text{couple}\\ \text{appliqué}}}{\Gamma \sin \omega t},$$

équation qui traduit le mouvement d'un pendule [notations du § 1-12], soumis à l'action d'un couple sinusoïdal $\gamma = \Gamma \sin \omega t$ dû à un système

dit *excitateur*. Le pendule constituant le système *résonateur* a une période d'*oscillation propre*, l'excitateur a une période d'oscillation *appliquée*. Rappelons que :

1° Au bout d'un temps d'autant plus court que le résonateur est plus amorti, le mouvement du résonateur devient sinusoïdal. Il est en *oscillation forcée* : l'excitateur lui a imposé sa période.

2° Lorsque la période de l'excitateur (oscillation appliquée) est égale à la période d'oscillation propre du résonateur non amorti, on dit qu'il y a phénomène de *résonance*. Les oscillations du résonateur présentent un maximum d'amplitude au voisinage de la résonance.

De même, dans un circuit électrique soumis à l'action d'une F. É. M. sinusoïdale, il s'écoule un certain intervalle de temps dit de *régime transitoire* avant que l'alternateur ait imposé au circuit sa période d'oscillation forcée (régime *permanent*). Mais, dans la pratique, l'amortissement [1] des circuits à courants alternatifs est si grand, que le temps de régime transitoire est extrêmement court (la durée de fermeture d'un interrupteur, par exemple). C'est pourquoi, dorénavant, nous nous placerons toujours dans le cas du régime permanent.

2. **Les récepteurs parfaits.** — Un circuit a trois propriétés de nature physique différente : résistance, inductance, capacité. Afin de mieux analyser leurs effets, nous considérerons successivement trois récepteurs dits *parfaits*, c'est-à-dire possédant l'une des trois propriétés à l'exclusion des deux autres : une résistance pure, une inductance pure, une capacité pure [2].

Nous ferons cette étude d'abord par la méthode graphique (vectorielle), puis par la méthode symbolique (nombres complexes).

MÉTHODE GRAPHIQUE

I. — Récepteur parfait unique

3. **Résistance pure.** — Aux bornes d'un alternateur entre lesquelles est engendrée une D. D. P. sinusoïdale :

$$u = U_m \sin \omega t,$$

connectons (fig. 2) une résistance pure R.

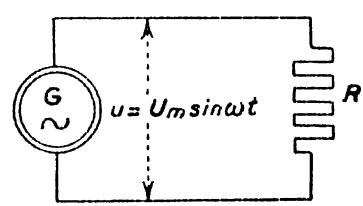


FIG. 9-2.

Aucune F. É. M. n'existant entre

[1] En effet, l'intégrale générale de l'équation du circuit électrique est de la forme :

$$i = Ae^{-\frac{R}{2L}t}\left[-\frac{R}{2L}\sin(\omega' t + \varphi') + \omega' \cos(\omega' t + \varphi')\right] + B\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

avec ω = pulsation de la source (excitateur) et ω' = pulsation propre du circuit, le terme exponentiel décroît et d'autant plus rapidement que le rapport $R/2L$ est grand, c'est-à-dire que le circuit est plus fortement amorti.

[2] Ils sont théoriques, irréalisables, mais on peut s'en rapprocher très sensiblement, surtout en ce qui concerne la résistance et la capacité pures.

les extrémités de la résistance, la loi d'Ohm simple s'applique à celle-ci et le courant instantané a pour expression :

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = \boxed{I_m \sin \omega t}$$

en posant : $I_m = \frac{U_m}{R}$, d'où (valeurs efficaces) $\boxed{I = \frac{U}{R}}$.

Conclusions :

1° *La valeur efficace du courant est* $\frac{U}{R}$ (comme en courant continu).

2° *Le courant est en phase avec la tension U.*

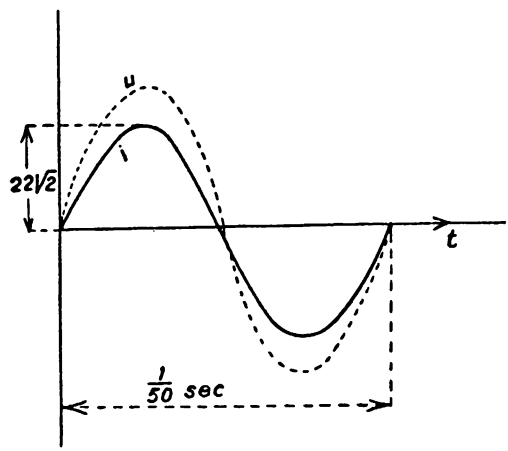


FIG. 9-3.

Par exemple, une tension sinusoïdale de 110 V efficaces à la fréquence 50 Hz crée dans une résistance pure de 5 Ω un courant $I = \frac{110}{5} = 22$ A (valeur efficace) dont l'expression instantanée est :

$$i = 22\sqrt{2} \sin 314\, t \qquad (\omega = 2\pi \times 50 = 314 \text{ rd/s}).$$

Ce courant sera représenté par la sinusoïde (fig. 3) ou bien par le vecteur (fig. 4) porté suivant la direction du vecteur U origine des phases.

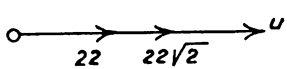


FIG. 2-4.

Le produit $U = RI$ qui représente la chute de tension produite par une résistance pure R parcourue par le courant I est appelé *chute par résistance.*

Observation importante. — On obtient une figure semblable à un graphique en multipliant tous les vecteurs par un même rapport. Multiplions-les par $\frac{1}{\sqrt{2}}$: nous obtenons un graphique dont les vecteurs représentent les valeurs efficaces des grandeurs sinusoïdales considérées.

Comme les valeurs efficaces des grandeurs électriques sinusoïdales sont celles qui sont directement données par les appareils de mesure, il est plus simple de raisonner toujours sur celle-ci.

Dorénavant, *tous les vecteurs de nos graphiques* représenteront, à une échelle qui sera indiquée, les *valeurs efficaces* des grandeurs électriques figurées.

4. Inductance pure. — *Valeur du courant.* — Connectons une inductance pure sans fer (L = constante) aux bornes d'un alternateur entre lesquelles existe une D. D. P. sinusoïdale (fig. 5) :

$$u = U_m \sin \omega t.$$

Appliquons la loi d'Ohm à la portion de circuit que constitue l'inductance pure :

$$u - L\frac{di}{dt} = 0,$$

d'où :

$$U_m \sin \omega t = L\frac{di}{dt},$$

soit :

$$di = \frac{U_m}{L} \sin \omega t \, dt$$

et en intégrant :

$$i = -\frac{U_m}{L\omega} \cos \omega t = -\frac{U_m}{L\omega} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = \frac{U_m}{L\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Posons :

$$I_m = \frac{U_m}{L\omega}$$

ou :

$$I = \frac{U}{L\omega} \quad \begin{matrix} \text{volts} \\ \text{ampères} \\ \text{ohms} \end{matrix}$$

nous avons

$$\boxed{i = I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

En définitive, dans une inductance pure, le courant :

a) Est limité par la grandeur $L\omega$: c'est pourquoi le produit $L\omega$, homogène à une résistance [1] est appelé *réactance d'induction* et s'exprime en ohms.

[1] *$L\omega$ n'est pas une résistance* : elle n'entraîne pas d'effet Joule, varie avec la pulsation ω et crée un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ entre la tension et le courant.

b) *Est déphasé de* $\frac{\pi}{2}$ *en retard sur la tension.*

Par exemple, une inductance pure de 0,3 H soumise à une tension sinusoïdale $U = 200$ V à la fréquence de 50 Hz est traversée par un courant :

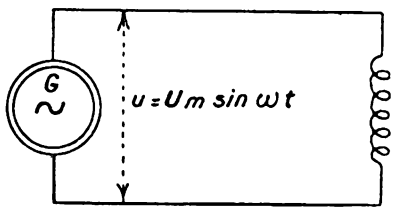


FIG. 9-5.

$$I = \frac{200}{0{,}3 \times 314} = 2{,}1 \text{ A}$$

dont l'expression instantanée est :

$$i = 2{,}1\sqrt{2}\sin\left(314\,t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Les figures 6 et 7 représentent ce courant dans les modes cartésien et vectoriel.

CHUTE INDUCTIVE. — La D. D. P. $U = L\omega I$ entre les bornes d'une inductance pure parcourue par un courant I est appelée *chute inductive.* Nous avons obtenu :

$$u = L\frac{di}{dt}$$

et nous connaissons l'expression de la F. É. M. d'autoinduction engendrée dans la bobine :

$$e_a = -L\frac{di}{dt} = -u$$

soit $\vec{E_a} = -\vec{U} = -\overrightarrow{L\omega I}.$

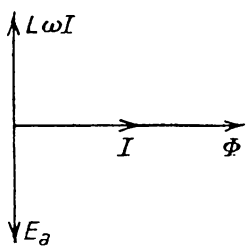


FIG. 9-6.

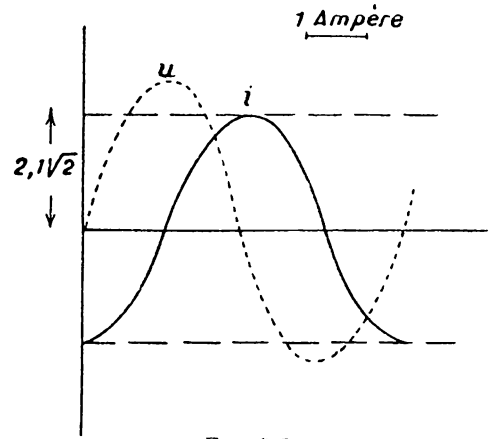


FIG. 9-7.

Nous voyons que : *à toute F. É. M. d'autoinduction* E_a *engendrée dans une bobine est opposée une chute de tension* $L\omega I$ *égale* avec :

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\text{flux d'autoinduction}}{\text{courant correspondant}}.$$

ANALOGIE MÉCANIQUE. — Quand on inverse périodiquement le courant d'alimentation d'un moteur électrique, les changements du sens de

rotation sont toujours en retard sur les inversions de courant. En effet, le moteur tourne à la vitesse ω lorsque le courant s'inverse et ne peut s'arrêter que lorsqu'il a dépensé toute l'énergie cinétique $\frac{1}{2} K\omega^2$ (K = moment d'inertie du rotor par rapport à l'axe de rotation) qu'il possède à ce moment. Par ailleurs, les valeurs maximales de la vitesse qu'il atteint seront d'autant plus faibles que la fréquence des inversions de courant est plus grande.

En se reportant aux analogies signalées [8-12] entre l'inductance et le moment d'inertie, la F. É. M. et le couple, la vitesse et le courant, on rattachera étroitement le dispositif précédent au circuit doué d'inductance.

Conséquences et applications. — 1° Une inductance s'oppose au passage des courants alternatifs par une réactance $L\omega$ proportionnelle à la fréquence. Elle constitue donc un *barrage contre les courants de haute fréquence* [11].

Les principales applications des bobines d'inductance (écoulement des charges statiques, protection contre les ondes à front raide) sont basées sur cette propriété.

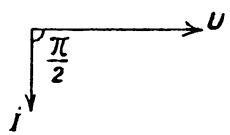


FIG. 9-8.

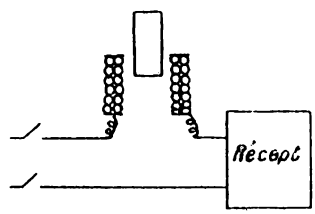


FIG. 9-9.

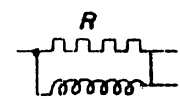


FIG. 9-10.

2° On peut régler le courant dans un circuit parcouru par un courant alternatif (fig. 9) en y insérant une *inductance L variable* (par exemple par déplacement du noyau magnétique d'une bobine). On crée dans la bobine une chute de tension $L\omega I$ variable.

3° Une résistance R shuntée par une bobine d'inductance L (fig. 10) est court-circuitée aux basses fréquences ; l'effet de shunt est de moins en moins important quand la fréquence croît.

4 *bis.* **Groupement des inductances pures.** — 1° *Inductances en série sans induction mutuelle.* — On a, puisque les chutes de tension sont toutes déphasées de $\pi/2$ en avant du courant :

$$U = L_1\omega I_1 + L_2\omega I_2 + \ldots$$
$$U = I\omega(L_1 + L_2 + \ldots)$$

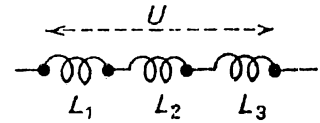


FIG. 9-11.

L'inductance équivalente à l'ensemble est donc :

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots$$

2° *Deux inductances en série avec inductance mutuelle.* — Déjà traité [19-25] On a :

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M$$

3° *Inductances en parallèle sans induction mutuelle.* — Les courants sont tous déphasés de $\pi/2$ en retard sur la tension U. Ils seront donc en phase :

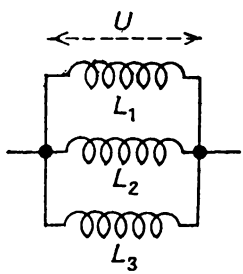


FIG. 9-12.

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots = \frac{U}{L_1\omega} + \frac{U}{L_2\omega} + \frac{U}{L_3\omega} + \ldots$$

D'où :

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \ldots$$

4° *Deux inductances en parallèle avec induction mutuelle.* — On a :

$$U = L_1\omega I_1 + M\omega I_2 \qquad (1)$$

$$U = L_2\omega I_2 + M\omega I_1 \qquad (2)$$

Éliminons I_1, I_2, U entre ces équations. Multiplions (1) par L_2 et (2) par M. Nous obtenons :

$$UL_2 = L_1L_2\omega I_1 + ML_2\omega I_2$$

$$UM = L_2M\omega I_2 + M^2\omega I_1$$

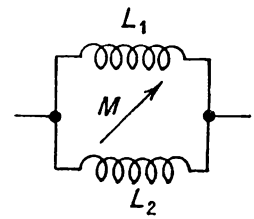


FIG. 9-13.

Par soustraction, on a :

$$UL_2 - UM = L_1L_2\omega I_1 - M^2\omega I_1 \qquad (3)$$

Multiplions (2) par L_1 et (1) par M :

$$UL_1 = L_1L_2\omega I_2 + ML_1\omega I_1$$

$$UM = ML_1\omega I_1 + M^2\omega I_2$$

Par soustraction nous obtenons :

$$UM - UL_1 = M^2\omega I_2 - L_1L_2\omega I_2 \qquad (4)$$

L'équation (3) nous donne I_1 et l'équation (4) nous donne I_2 :

$$I_1 = \frac{U(L_2 - M)}{L_1L_2\omega - M^2\omega} \qquad I_2 = \frac{U(M - L_1)}{M^2\omega - L_1L_2\omega}$$

Les courants I_1I_2 sont déphasés de $\pi/2$ par rapport à U. Ils sont donc en phase :

$$I = I_1 + I_2 = U\,\frac{L_1 + L_2 - 2M}{(L_1L_2 - M^2)\omega}$$

L'inductance-équivalente à l'ensemble est donc :

$$L = \frac{U}{\omega I} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

5. **Capacité pure.** — Nous avons montré [8-8] qu'un condensateur relié aux bornes d'un générateur à courant continu détermine, dans le circuit ainsi formé, un courant de charge qui a une durée très courte. En fait, au bout de peu de temps une capacité interrompt le passage du courant dans un circuit à courant continu.

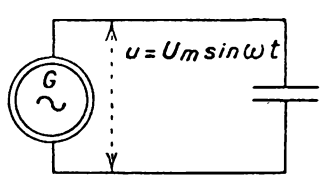


FIG. 9-14.

Il n'en est pas de même en courant alternatif : la D. D. P. entre les bornes du condensateur étant alternative, celui-ci peut subir des charges et décharges successives et tout se passe comme si le courant traversait le condensateur lui-même.

Intensité du courant. — Soit un condensateur de capacité C connecté aux bornes d'un alternateur entre lesquelles existe une D. D. P. (fig. 14) :

$$u = U_m \sin \omega t.$$

Si q désigne la charge du condensateur à l'instant t, on a :

$$q = Cu$$

et :

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt} = C\omega U_m \cos \omega t = C\omega U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Posons :

$$I_m = C\omega U_m$$

ou :

$$\underset{\text{ampères}}{I} = C\omega U = \frac{\overset{\text{volts}}{U}}{\underset{\text{farads}}{\frac{1}{C}} \quad \underset{\text{rd/s}}{\omega}} \Big\} \text{ ohms}$$

nous avons :

$$i = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Donc, dans une capacité pure, le courant :

a) Est limité par la grandeur $\frac{1}{C\omega}$: c'est pourquoi la quantité $\frac{1}{C\omega}$, homogène à une résistance, est appelée *réactance de capacité* et s'exprime en *ohms* (1).

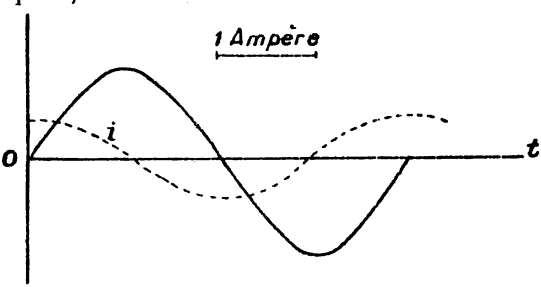


FIG. 9-15.

b) *Est déphasé de* $\frac{\pi}{2}$ *en avance sur la tension.*

Par exemple, un condensateur de 20 μF auquel est appliquée une tension sinusoïdale $U = 100$ V à la fréquence de 25 Hz est parcouru par un courant :

FIG. 9-16.

$$(\omega = 2\pi \times 25 = 157 \text{ rd/s})$$

$$I = \frac{U}{\frac{1}{C\omega}} = \frac{100}{\frac{1}{20 \times 10^{-6} \times 157}} = \frac{100}{318{,}4} = 0{,}314 \text{ A},$$

dont l'expression instantanée est :

$$i = 0{,}314\sqrt{2} \sin\left(157\, t + \frac{\pi}{2}\right)$$

et dont nous donnons (fig. 15 et 16) les représentations cartésienne et vectorielle.

(1) De façon plus exacte, la réactance de capacité est $-\frac{1}{C\omega}$ (décision de la Commission Électrotechnique internationale). Nous expliquerons plus loin le signe (—).

Nous noterons que la D. D. P. entre les armatures d'un condensateur parcouru par un courant I est:

$$U = \frac{I}{C\omega}.$$

Analogie mécanique. — Supposons qu'un dispositif mécanique provoque un mouvement alternatif vertical de deux réservoirs A et B (1). Il en résulte une pression alternative sur les deux faces de la membrane élastique. Les déformations de celle-ci correspondant à des déplacements du liquide, un courant liquide alternatif circulera entre les deux réservoirs.

Sa vitesse sera nulle lorsque la membrane sera à son maximum de tension élastique, c'est-à-dire lorsque la différence de pression sur ses deux faces sera maximale. En assimilant le débit du liquide à l'intensité du courant, la différence de pression due au dispositif mécanique à la différence de potentiel électrique engendrée par l'alternateur, l'analogie devient frappante entre le système hydraulique et le circuit électrique.

Par ailleurs, à une même tension maximale correspond une même quantité d'électricité ΔQ déplacée par demi-période : l'intensité moyenne $\Delta Q : T/2$ sera donc d'autant plus grande que le temps $\frac{T}{2}$ de déplacement de cette quantité d'électricité sera plus court, autrement dit que la fréquence de la tension sera plus grande.

Conséquences. — La réactance de capacité étant d'autant plus faible que la fréquence est plus élevée, un condensateur constitue, dans un circuit, une *résistance faible* ou un *court-circuit* pour les courants de haute fréquence et au contraire un barrage pour les courants de basse fréquence (le courant continu est un courant de fréquence nulle).

Cette propriété a son application dans la protection des lignes contre les surtensions, l'élimination des parasites (courants de haute fréquence) émis par les machines à collecteurs, le filtrage des courants utilisés dans la téléphonie par courants porteurs, l'élimination des courants de haute fréquence susceptibles de passer dans les écouteurs de Radio, etc...

II. — Récepteurs réels

6. **Récepteur réel unique.** — Nous avons dit que, dans la réalité, un récepteur présente à des degrés divers, à la fois de la résistance, de l'inductance et de la capacité. Soit Z un tel récepteur branché aux bornes de l'alternateur (fig. 17).

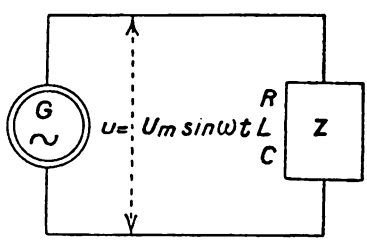


Fig. 9-17.

La loi d'Ohm appliquée à la portion de circuit qui comporte le récepteur Z donne :

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri = U_m \sin \omega t\,;$$

soit :

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = U_m \sin \omega t.$$

Nous avons montré [1] qu'en régime permanent, le courant est

(1) Ces deux réservoirs sont reliés par une conduite qui comporte une membrane élastique.

sinusoïdal et de pulsation ω. Si, au lieu de U, nous prenons ce courant pour origine des phases, il s'écrit :

$$i = I_m \sin \omega t ;$$

d'où :

$$\frac{di}{dt} = I_m \omega \cos \omega t = I_m \omega \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\int i \, dt = - \frac{I_m}{\omega} \cos \omega t = \frac{I_m}{\omega} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

L'équation précédente s'écrira, en régime permanent :

$$L\omega I_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + RI_m \sin \omega t + \frac{I_m}{C\omega} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = U_m (\sin \omega t + \varphi).$$

On voit que la tension sinusoïdale

$$u = U_m \sin (\omega t + \varphi)$$

est la somme de trois tensions sinusoïdales ; donc son vecteur représentatif sera la somme géométrique des vecteurs représentant les tensions composantes :

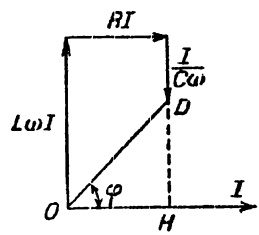


FIG. 9-18.

$L\omega I$ déphasé de $\frac{\pi}{2}$ en avant de I ;

RI en phase avec I ;

$\frac{I}{C\omega}$ déphasé de $\frac{\pi}{2}$ en arrière de I.

Le graphique est donné par la figure 18. Dans le triangle ODH, on a :

$$\overline{OD}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HD}^2$$

et :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{DH}{OH}.$$

D'où :

$$U^2 = (RI)^2 + \left(L\omega I - \frac{I}{C\omega} \right)^2$$

et :

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}}$$

Soit :

$$\boxed{I_{\text{ampères}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega} \right)^2}} = \frac{U_{\text{volts}}}{Z_{\text{ohms}}}}$$

En définitive :

a) *Un récepteur soumis à une D. D. P. sinusoïdale est traversé par un courant sinusoïdal qui dépend de la grandeur :*

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

Cette grandeur, homogène à une résistance, est appelée *l'impédance* du récepteur et s'exprime en *ohms*.

b) *Le courant dans un récepteur est déphasé par rapport à la tension sinusoïdale qui lui est appliquée, d'un angle* φ *défini par la relation :*

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R} = \frac{\text{Réactance effective}}{\text{Résistance}}$$

ou bien :

$$\cos\varphi = \frac{OH}{OD} = \frac{RI}{ZI} = \frac{R}{Z} = \frac{\text{Résistance}}{\text{Impédance}}.$$

Remarque I. — Dans la formule de l'impédance, la réactance de capacité se retranche de la réactance d'induction pour donner la réactance *effective*. Cela explique pourquoi la réactance de capacité est affectée du signe (—). On exprime parfois ce fait de la façon suivante : la capacité est l'*antidote* de l'inductance et réciproquement.

Remarque II. — Quand une capacité est nulle (armatures infiniment écartées), sa réactance de capacité $\frac{1}{C\omega}$ est infinie : aucun courant ne passe dans cette capacité mise sous tension.

Quand au contraire, la capacité est infinie (armatures infiniment rapprochées), sa réactance de capacité $\frac{1}{C\omega}$ est nulle : véritable court-circuit par mise sous tension.

Remarque III. — Dans la réalité industrielle, les réactances de capacité sont généralement négligeables (1). Le plus souvent, les récepteurs se comportent comme des inductances non pures (douées de résistance).

Remarque IV. — Quand une bobine d'inductance a un noyau de fer, son inductance *diminue* dès que son induction dépasse la valeur limite de la partie rectiligne de la courbe $B(H)$. Donc les forts courants (excitations intenses), prennent des valeurs *supérieures* à celles calculées en supposant L constant.

Par ailleurs, dans ce même cas (noyau de fer), la résistance R qui intervient dans les formules précédentes est plus grande que sa résistance réelle mesurée en courant continu. Nous expliquerons cette majoration [10-10].

(1) En dehors des condensateurs construits spécialement pour jouer ce rôle. Le cas où ils interviennent le plus fréquemment est celui des lignes souterraines qui, par la disposition de leurs conducteurs séparés par des diélectriques, constituent de véritables condensateurs. En Radiotechnique où les courants utilisés sont à haute fréquence, les effets de capacité sont extrêmement importants ⌐

7. **Récepteurs en série.** — Considérons (fig. 19), trois récepteurs $M(R_1L_1C_1), N(R_2L_2C_2), P(R_3L_3C_3)$ connectés en série sous une D. D. P. $u = U_m \sin \omega t$.

Le courant est commun aux trois récepteurs : nous le prendrons comme origine des phases [1] et exprimerons que la tension U aux bornes de l'alternateur est égale à la somme des trois chutes de tension U_1, U_2, U_3, dans les trois récepteurs :

$$\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \vec{U}_3.$$

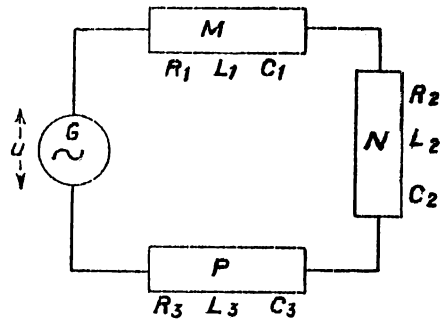


FIG. 9-19.

Le graphique (fig. 20) ainsi obtenu nous donne :

$$\vec{U}^2 = \overrightarrow{OK}^2 = \overrightarrow{OH}^2 + \overrightarrow{HK}^2,$$

soit :

$$U^2 = (\Sigma RI)^2 + \left(\Sigma L\omega I - \Sigma \frac{I}{C\omega}\right)^2$$

d'où :

$$I = \frac{U}{\sqrt{(\Sigma R)^2 + \left(\Sigma L\omega - \Sigma \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

Comparons cette expression à celle du récepteur unique. Nous sommes conduits à la règle suivante :

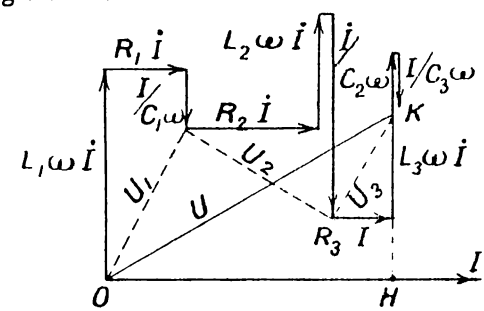


FIG. 9-20.

Plusieurs récepteurs en série se comportent *comme un récepteur unique* ayant :

pour *résistance*, la *somme des résistances* de ces récepteurs ;
pour *réactance d'induction*, *la somme de leurs réactances d'induction* [2] ;
pour *réactance de capacité*, *la somme de leurs réactances de capacité*.

[1] C'est une règle que l'on doit toujours appliquer dans les graphiques : prendre pour origine des phases la grandeur commune aux différents récepteurs.

[2] Cela suppose qu'entre les différents appareils n'existe aucune induction mutuelle [7-29] et que les fils de connexion (torsadés, par exemple) ont une inductance nulle.

REMARQUE. — Le graphique (fig. 20) montre que la tension aux bornes d'un alternateur est toujours inférieure à la somme des chutes de tension aux bornes de chacun des récepteurs. Ceux-ci peuvent être soumis à des tensions excessives alors que la tension de l'alternateur est normale. Donc, en courant alternatif, les récepteurs associés en série doivent être protégés *individuellement* contre les *surtensions*.

8. **Récepteurs en parallèle.** — Soient (fig. 21) trois récepteurs M, N, P caractérisés par les constantes $R_1L_1C_1$, $R_2L_2C_2$, $R_3L_3C_3$ et dont les impédances sont respectivement Z_1, Z_2, Z_3. Connectés en parallèle sous la même tension sinusoïdale $u = U_m \sin \omega t$, ils sont respectivement parcourus par les courants :

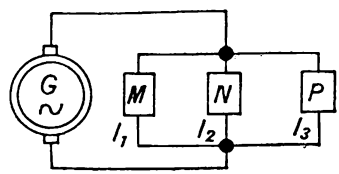


FIG. 9-21.

$$I_1 = \frac{U}{Z_1}; \quad I_2 = \frac{U}{Z_2}; \quad I_3 = \frac{U}{Z_3}$$

respectivement déphasés, par rapport à la tension U, des angles φ_1, φ_2, φ_3, tels que :

$$\cos \varphi_1 = \frac{R_1}{Z_1}; \quad \cos \varphi_2 = \frac{R_2}{Z_2}; \quad \cos \varphi_3 = \frac{R_3}{Z_3}.$$

La valeur instantanée du courant résultant des courants dans les trois récepteurs est égale à la somme algébrique de ceux-ci. Donc, le courant résultant sera représenté par le vecteur somme géométrique des vecteurs représentant les courants individuels.

Exprimons cette égalité géométrique en prenant pour origine des phases la grandeur commune aux trois récepteurs : la tension. Nous prendrons soin de porter en déphasage *avant* les courants des récepteurs dont la réactance de capacité est supérieure en valeur absolue à la réactance d'induction et en déphasage *arrière* les courants des récepteurs dont la réactance d'induction est supérieure à la réactance de capacité. Nous obtenons le graphique de la figure 22.

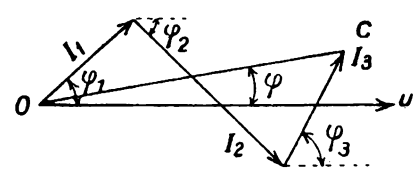


FIG. 9-22.

Le vecteur OC représente le courant I résultant. La construction nous donne en même temps son déphasage φ par rapport à la tension U.

REMARQUE. — Le courant résultant est plus faible que la somme des courants composants ; d'où l'obligation, en courant alternatif, de disposer un organe de protection contre les surintensités (coupe-circuit, disjoncteur) en série avec chaque récepteur.

9. **Récepteurs en série et en parallèle.** — Le problème général que l'étude précédente des différents cas particuliers doit nous permettre de résoudre est le suivant :

Étant donnés différents récepteurs groupés de façon quelconque, dont l'ensemble est soumis à une D. D. P. sinusoïdale donnée, déterminer le courant qui parcourt chacun des récepteurs.

Ce problème peut être résolu par plusieurs méthodes dont les plus usitées sont :

la méthode graphique ;

la méthode Boucherot (par la séparation des puissances) ;

la méthode symbolique (emploi des nombres imaginaires).

La seconde sera exposée plus loin après l'étude de la puissance alternative ; la troisième à la fin du présent chapitre.

Quant à la méthode graphique, voici les règles à observer dans son application :

a) On a le droit de se fixer arbitrairement la position de l'un des vecteurs du graphe (origine des phases).

b) Dans le tracé du graphe, on sera libre de commencer par des grandeurs connues ou inconnues, à condition qu'on tienne compte des *longueurs relatives* des vecteurs et de leur *position relative*. L'échelle pourra être déterminée lorsque le graphe sera achevé.

c) Lorsqu'on a dû exécuter plusieurs graphes partiels, il faut modifier leurs échelles de façon à les ajuster les unes aux autres.

Cette méthode ne sera évidemment comprise qu'après résolution de quelques applications numériques.

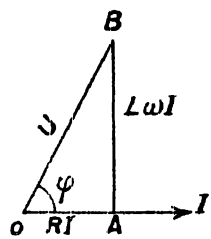


FIG. 9-23.

REMARQUE. — Lorsqu'on a déterminé le courant qui alimente tout un ensemble de récepteurs et le déphasage de ce courant sur la tension d'alimentation, il est parfois commode de substituer à tout cet ensemble une impédance dite *équivalente*, c'est-à-dire capable, sous la même tension U, d'absorber le même courant I avec le même déphasage φ.

La tension U aux bornes d'une impédance (sans capacité), étant donnée par le graphique de la figure 23, on a :

$$OA = RI = U \cos \varphi.$$
$$AB = L\omega I = U \sin \varphi.$$

Donc les caractéristiques R et L de l'impédance équivalente sont :

$$R = \frac{U \cos \varphi}{I} \qquad L = \frac{U \sin \varphi}{I\omega}.$$

Par exemple, une installation qui, sous 200 V, à la fréquence 50 Hz, absorbe un courant de 150 A avec $\cos \varphi = 0{,}8$ équivaut à une impédance ayant pour résistance et inductance :

$$R = \frac{200 \times 0{,}8}{150} = 1{,}06\ \Omega ; \qquad L = \frac{200 \times 0{,}6}{150 \times 314} = 2{,}54 \times 10^{-3}\ \text{H}.$$

10. **Résonance en série. Risque de surtensions.** — L'analogie que nous avons [8-12] mise en évidence entre un circuit électrique et un système mécanique oscillant (résonateur) et d'autre part entre l'alternateur et un système excitateur, nous conduit à envisager le cas de la résonance où l'on a :

T (période de l'alternateur) $= 2\pi \sqrt{LC}$ (période propre au circuit non amorti).

Si ω désigne la pulsation de l'alternateur, cette égalité peut s'écrire :

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC} \qquad \text{ou} \qquad LC\omega^2 = 1 \qquad \text{soit} \qquad L\omega = \frac{1}{C\omega};$$

elle exprime qu'à la fréquence de l'alternateur la réactance d'induction du circuit est égale en valeur absolue à sa réactance de capacité. Traitons deux cas :

Soit en série une bobine (résistance R, inductance L) et un condensateur de capacité C (fig. 24). Supposons que ces deux récepteurs réalisent la condition de résonance :

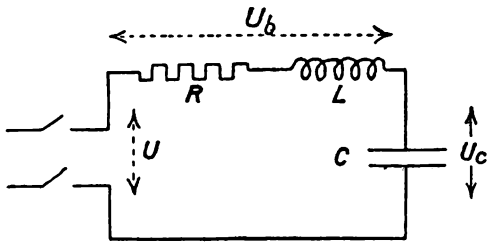


Fig. 9-24.

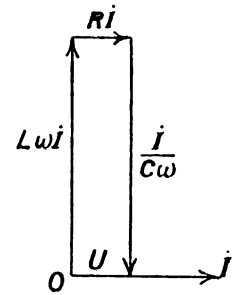


Fig. 9-25.

$$L\omega = \frac{1}{C\omega},$$

leur impédance :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

se réduit à la résistance R. Le graphique prend l'allure de la figure 25. On a : $U = RI$, d'où pour le courant dans le circuit :

$$I = \frac{U}{R}.$$

C'est le maximum qu'il puisse atteindre (maximum d'amplitude à la résonance entre un excitateur et un résonateur) et ce maximum peut constituer, pour les récepteurs en circuit, une dangereuse surintensité.

Mais ce n'est pas là, en général, le principal risque. Déterminons, à la résonance (pulsation ω_0), la tension aux bornes du condensateur :

$$U_c = \frac{I}{C\omega_0} = \frac{U}{R} \times \frac{1}{C\omega_0} = \frac{1}{CR\omega_0} \times U.$$

Le facteur $\frac{1}{CR\omega_0}$ appelé *facteur de surtension* peut être très supérieur à l'unité et la tension U_c aux bornes du condensateur beaucoup plus grande que la tension U de la source.

De même, aux bornes de la bobine, la tension sera :

$$U_b = Z'I = Z' \times \frac{U}{R} = U \times \frac{Z'}{R}$$

$Z' = \sqrt{R^2 + L^2\omega_0^2}$ désignant l'impédance de la bobine à la résonance. En général, surtout en haute fréquence, le terme R disparaît devant la réactance $L\omega_0$ et le rapport Z'/R devient pratiquement égal à $L\omega_0/R$.

C'est pourquoi le quotient $L\omega_0/R$ de la réactance d'une bobine à la résonance par sa résistance est désigné en radiotechnique sous le nom de *facteur de qualité*. On le représente par la lettre Q.

En définitive, la résonance en série engendre aux bornes des condensateurs et des bobines des surtensions qui peuvent être dangereuses pour ces récepteurs.

La résonance en série peut donc provoquer le perçage des diélectriques des condensateurs et de l'isolant des conducteurs constituant les bobines en circuit.

En général, à la fréquence industrielle des réseaux, les résonances ne sont pas à craindre, car $LC\omega^2$ est beaucoup plus petit que 1 (1). Mais des résonances peuvent se produire sur un harmonique d'ordre n (pulsation $n\omega$), car on peut avoir $LCn^2\omega^2 = 1$. C'est l'une des raisons pour lesquelles on cherche à donner au graphe de F. É. M. des alternateurs une forme aussi voisine que possible de la sinusoïde (2).

11. **Graphe de résonance.** — Lorsque le facteur de qualité Q de la bobine est élevé, le maximum de tension entre les bornes de l'inductance ou de la capacité est grand et très marqué. Le circuit est dit *sélectif*. Nous nous proposons de préciser l'influence de Q sur cette sélectivité.

Désignons par I_0 le courant à la résonance :

$$I_0 = U/R\,; \qquad I = U/Z\,; \qquad \cos\varphi = R/Z$$

D'où :

$$I = U/Z = U/R \times R/Z = I_0 \cos\varphi \quad \text{(fig. 26)}$$

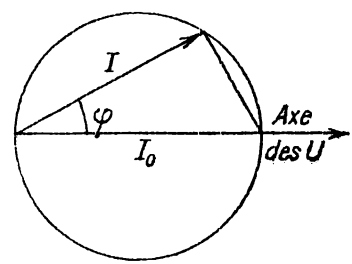


FIG. 9-26.

Quand la fréquence croît de 0 à ∞, le courant croît de zéro à un maximum égal à I_0 puis décroît. Le courant est déphasé en avant jusqu'à la résonance, en arrière ensuite.

Étudions la variation du rapport I_0/I en fonction du rapport ω/ω_0 de la pulsation de la source à la pulsation ω_0 correspondant à la résonance ($\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$) :

$$\left(\frac{I_0}{I}\right)^2 = \frac{Z^2}{R^2} = \frac{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}{R^2} = 1 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{LC\omega^2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2 \left(1 - \frac{LC\omega_0^2}{LC\omega^2}\right)^2$$

car on a $LC\omega_0^2 = 1$.

(1) En appliquant la formule de Thomson $T = 2\pi\sqrt{LC}$, on constate qu'à la fréquence de 50 Hz, il faut une capacité de 1 µF pour réaliser la résonance lorsque l'inductance est de 10 H. Les capacités sont en général très inférieures à celles qui détermineraient la résonance à 50 Hz et lorsqu'une résonance locale se produit (par exemple entre un transformateur de potentiel et quelques mètres de câble souterrain), l'influence du reste du réseau est telle qu'on n'observe aucune anomalie dans la marche.

(2) Nous engageons le lecteur à rattacher au phénomène de résonance électrique le phénomène de résonance mécanique en utilisant les analogies signalées [8-12].

$$\left(\frac{I_0}{I}\right)^2 = 1 + \frac{L^2\omega^2}{R^2}\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 = 1 + \frac{L^2\omega_0^2}{R^2}\left[\frac{\omega}{\omega_0}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\right]^2$$

soit enfin :

$$\left(\frac{I_0}{I}\right)^2 = 1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$$

La sélectivité peut être caractérisée par la largeur de la bande de fréquence à l'intérieur de laquelle on a (fig. 27) :

$$I_0/I > \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad (I_0/I)^2 - 1 > 1$$

Posons $(I_0/I)^2 - 1 = m^2$. L'équation précédente s'écrit :

$$m^2 = Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \pm m = Q\,\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\omega_0}$$

La pulsation ω, dans les limites indiquées, doit donc satisfaire à l'équation du deuxième degré :

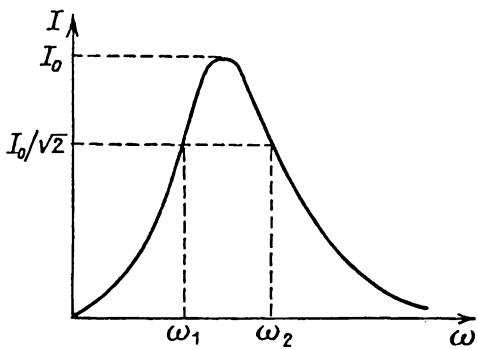


FIG. 9-27.

$$\omega^2 \mp \omega \times m\omega_0/Q - \omega_0^2 = 0$$

Des racines de cette équation, il faut retenir seulement :

$$\omega_1 = + m\omega_0/2Q + \sqrt{(m\omega_0/2Q)^2 + \omega_0^2}$$

et :

$$\omega_2 = - m\omega_0/2Q + \sqrt{(m\omega_0/2Q)^2 + \omega_0^2}$$

le radical étant toujours pris avec le signe + car ω doit être positif.

Pour $m = 1$ on a $I_0/I = \sqrt{2}$ et $\omega_1 - \omega_2$ représente la largeur de la bande de fréquence (fig. 27) à l'intérieur de laquelle on a $I > I_0/\sqrt{2}$. On voit qu'on a alors :

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0} = \frac{f_1 - f_2}{f_0} = m\omega_0/Q\omega_0 = \frac{m}{Q} = \frac{1}{Q} \quad .$$

Si, par exemple, le *facteur de qualité Q du circuit est égal à 100*, le courant s'abaissera *au-dessous de 70 %* du courant à la résonance dès que *la fréquence s'écartera* de *la fréquence de résonance* (dans un sens ou dans l'autre) *de plus de 0,5 %*.

Notons qu'à ces fréquences f_1 et f_2 on a $I/I_0 = 1/\sqrt{2}$ et le déphasage φ du courant par rapport à la tension est $\pi/4$ (en avant au-dessous de la résonance, en arrière au-dessus). La réactance effective du circuit est égale à sa résistance ($\operatorname{tg}\varphi = 1$).

12. **Antirésonance. Circuit bouchon.** — Soit une bobine d'inductance (R, L) en parallèle (fig. 28) avec un condensateur de capacité C, l'ensemble mis sous la tension :

$$u = U_m \sin \omega t.$$

a) Supposons *nulle* tout d'abord, la résistance R. Lorsque la pulsation de l'alternateur est ω_0 telle que l'ensemble des deux récepteurs soit en résonance, on a :

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0},$$

soit :

$$\frac{U}{L\omega_0} = C\omega_0 U ;$$

les courants dans la bobine d'inductance pure et, dans le condensateur sont égaux et, comme ils sont (fig. 29) en opposition, le courant I résultant est nul.

Résultat remarquable : le courant, dans le circuit oscillant bobine-condensateur peut être très intense, alors que l'alternateur ne lui fournit

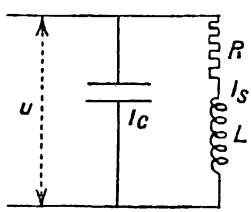


Fig. 9-28.

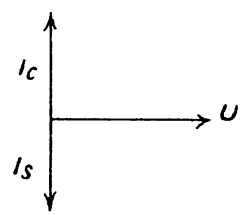


Fig. 9-29.

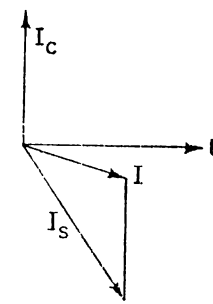


Fig. 9-29 *bis*.

aucun courant, donc aucune énergie. Ce phénomène s'explique aisément en rappelant que, dans un circuit oscillant sans résistance, les oscillations s'entretiennent elles-mêmes, sans apport d'énergie extérieure, parce que l'énergie électromagnétique $\frac{1}{2} Li^2$ se transforme intégralement en énergie électrostatique $\frac{1}{2} Cu^2$ et réciproquement.

b) Si la résistance R *n'est pas nulle*, le graphe devient celui de la figure 29 *bis*. Le courant résultant ne peut être nul. Résultat à prévoir, puisque le circuit oscillant est amorti et qu'un apport extérieur d'énergie lui est nécessaire pour l'entretien de ses oscillations. (Calculs p. 213.)

En définitive, un système inductance-capacité en parallèle ne laisse passer qu'un très faible courant lorsqu'il est en résonance avec l'alternateur. Son impédance est très grande vis-à-vis des courants qui ont une fréquence bien déterminée. On dit couramment qu'il forme *bouchon* vis-à-vis de cette fréquence. Les circuits bouchons ont d'importantes applications dans la téléphonie par courants porteurs et en radiotechnique.

13. **Application aux filtres électriques.** — Un filtre électrique est formé de *cellules* (éléments identiques) groupés en série. Chaque cellule est constituée par trois impédances (inductances ou capacités). On distingue trois sortes de filtres :

a) Les *filtres passe-bas* qui ne laissent pratiquement passer que les fréquences *inférieures* à une fréquence donnée (fig. 30). On voit en effet

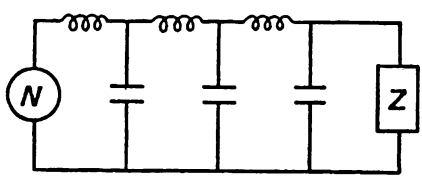


FIG. 9-30.

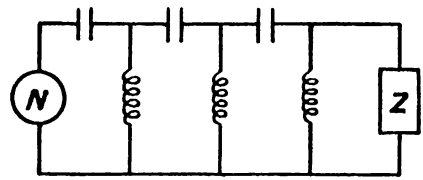


FIG. 9-31.

que les courants de haute fréquence ne parviennent au récepteur qu'avec une très faible amplitude parce qu'ils doivent traverser toutes les inductances, tandis qu'ils circulent facilement à travers les condensateurs en dérivation.

b) Les *filtres passe-haut* dont la disposition est inverse (fig. 31) et qui ne permettent le passage que de fréquences supérieures à une valeur

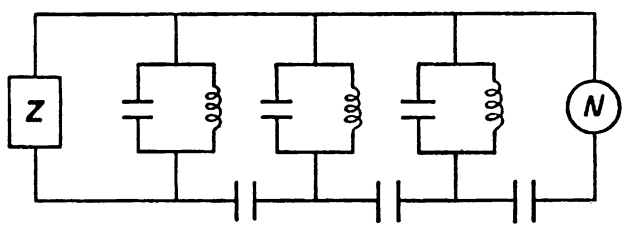


FIG. 9-32.

minimale car les courants de basse fréquence traversent difficilement les condensateurs et passent principalement par les inductances.

c) Les *filtres passe-bande* qui transmettent des courants dont les fréquences sont comprises entre deux limites f_1 et f_2. Ils sont formés par exemple (fig. 32) de condensateurs et de circuits bouchons montés comme l'indique la figure.

Si la fréquence est faible, le circuit bouchon se comporte comme une inductance et livre passage aux courants de basse fréquence, si la fréquence est élevée il se comporte comme une capacité et laisse passer les courants de haute fréquence.

14. **Effet de peau électrique.** — DÉFINITION. — Lorsqu'un conducteur est parcouru par un courant *alternatif*, la distribution du courant dans sa section n'est pas uniforme : la densité de courant est grande vers sa surface, faible suivant son axe. Tel est l'*effet de peau* ou effet Kelvin.

Son étude théorique s'effectue à partir des équations de Maxwell (1). Les formules auxquelles elle conduit sont assez compliquées et remplacées, dans la pratique, par les formules empiriques plus simples et d'une approximation suffisante.

(1) Nous nous bornerons ici à l'explication physique.

EXPLICATION PHYSIQUE. — Considérons un conducteur (fig. 33) cylindrique *aller* d'axe *MN* et un conducteur *PQ* de retour que, pour simplifier, nous supposerons de rayon négligeable.

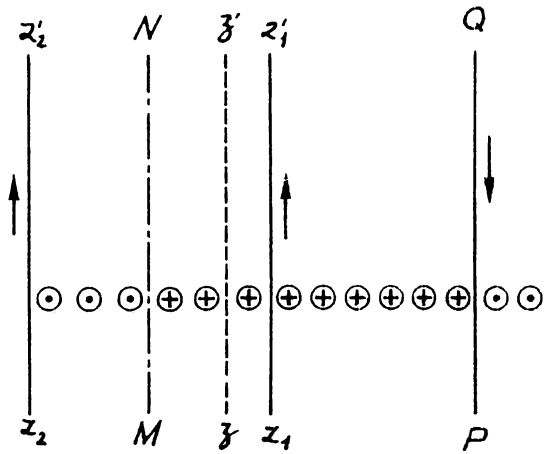


FIG. 9-33.

Avec les sens de courant adoptées les sens des lignes d'induction magnétique dans le conducteur *MN* et entre *MN* et *PQ* sont indiqués sur la figure 33.

Soit un filet de courant *zz'* dans le conducteur cylindrique. Si on l'associe au conducteur *PQ*, on constate, en le déplaçant de la position z_1z_1' à la position z_2z_2' que :

— entre z_1z_1' et *MN* le flux embrassé croît ;

— entre *MN* et z_2z_2' le flux embrassé décroît.

Donc pour un filet de courant *i* associé au conducteur de retour *PQ* l'inductance :

$$L = \frac{\text{flux entre } zz' \text{ et } PQ}{\text{courant } i}$$

est *minimale* en z_1z_1' ou z_2z_2' et *maximale* quand *zz'* se confond avec l'axe *MN*. La réactance d'induction $L\omega$ vis-à-vis d'un courant de pulsation ω est maximale suivant l'axe, minimale le long des génératrices du cylindre. Donc la *densité de courant* est *plus grande à la surface* du conducteur que suivant son axe.

Tel est l'*effet pelliculaire*. Il est évidemment d'autant plus marqué que :

1° La variation de *L* en allant de l'axe à la surface est plus grande. C'est le cas lorsque le conducteur est ferromagnétique (grande perméabilité).

2° La pulsation (donc la fréquence) du courant alternatif est plus grande ;

et la conséquence est une utilisation réduite de la section du conducteur donc l'*accroissement de sa résistance* en même temps que l'accroissement de la fréquence.

Coque fictive. Formules de Levasseur

a) *Formule* $R_a/R_c = K$. La formule empirique (1) du rapport de la résistance R_a en courant alternatif à la résistance R_c en courant continu a été donnée par Levasseur :

$$K = \frac{R_a}{R_c} = 0{,}25 + \sqrt[6]{0{,}178 + \left(0{,}002\,\frac{S}{p}\sqrt{\frac{\mu_r f}{\rho}}\right)^6}$$

(S = section en m² ; p = périmètre du conducteur en m, μ_r = perméabilité relative correspondant au champ ; f = fréquence en Hz ; ρ = résistivité en ohms-m²/m).

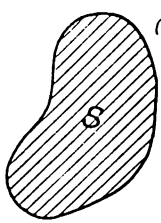


Fig. 9-34.

b) *Coque fictive ou épaisseur de peau.* On démontre qu'aux fréquences élevées, tout se passe comme si la *totalité* du courant se trouvait avec une densité J constante dans une *coque fictive* dont l'épaisseur ε est donnée ; soit directement par la formule :

$$\varepsilon = \sqrt{\rho/\pi\mu_r f}$$

soit à partir de K par la formule :

$$\varepsilon = r(1 - \sqrt{1 - 1/K})$$

r désignant le rayon du conducteur.

En appliquant cette formule à des conducteurs cylindriques rectilignes en cuivre, on trouve, à la fréquence 50 Hz, pour les diamètres 20, 30, 40 mm, les valeurs suivantes de K : 1,092, 1,436, 1,78.

Pour les conducteurs *non magnétiques* dont la section est inférieure au cm², à 50 Hz, l'effet pelliculaire n'est pas sensible et on n'en tient pas compte. Mais à la fréquence de 10^6 Hz, la résistance d'un fil de cuivre de 1 mm de diamètre a une résistance 4,5 fois plus grande qu'en courant continu.

c) *Cas du fil enroulé.* — Lorsqu'un fil est enroulé, il est le siège d'un effet pelliculaire supplémentaire : non seulement le courant se porte à la surface du fil, mais il ne se distribue pas régulièrement sur celle-ci. C'est ainsi que la résistance d'un fil de cuivre de 1 mm de diamètre qui est 2 Ω en courant continu, 9 Ω à la fréquence 10^6 Hz en fil rectiligne, devient égale à 30 Ω si ce fil est enroulé à spires jointives.

(1) Le calcul théorique de K fait appel aux fonctions de Bessel.

CONSÉQUENCES ET APPLICATIONS. — L'effet de peau électrique ou effet Kelvin a des conséquences et applications importantes.

1° *Division des conducteurs en haute fréquence.* — Quand la couche de peau est mince, le métal intérieur, dans la section du conducteur, devient inutile. C'est pourquoi on divise les conducteurs en petits fils isolés les uns des autres soit à fréquence industrielle quand ces conducteurs ont une grande section, soit à haute fréquence, même lorsque la section est assez faible.

A la fréquence 50 Hz, le calcul donne pour épaisseur de la couche de peau 0,95 cm environ pour le cuivre et 1,2 cm pour l'aluminium. Si l'on admet qu'au-delà du diamètre $d = 4\varepsilon$, le conducteur est mal utilisé, on est conduit à ne pas dépasser des diamètres de 3,8 cm pour le cuivre et 4,8 cm pour l'aluminium. Avec le fer, par suite de sa perméabilité magnétique, ce diamètre maximum serait 0,7 mm et il serait absurde d'essayer de conduire un courant même de basse fréquence, avec un fil de fer de diamètre supérieur à 1 mm.

2° La concentration du courant alternatif dans une mince couche est utilisée dans les *fours à haute fréquence* et dans la *trempe superficielle.*

15. **Ferrorésonance.** — C'est le phénomène qui résulte, dans un ensemble R, L, C, des variations de L dues à la saturation du *noyau de fer* de l'inductance.

Ferrorésonance en parallèle. Soit un ensemble (fig. 35) R, L, C en parallèle dans lequel l'inductance L à noyau de fer est supposée pure et qui est branché sous la tension U. Représentons le graphe (fig. 11) du courant réactif $J = |I_C - I_L|$ (fig. 36) en fonction de la tension U. Pour cela, faisons la somme des ordonnées du graphe $I_C = C\omega U$ (droite passant par l'origine) et du graphe $I_L = U/L\omega$ (fig. 37).

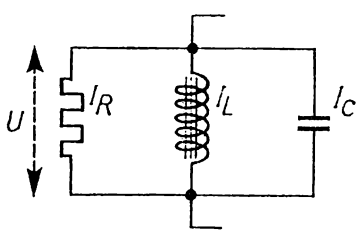


FIG. 9-35.

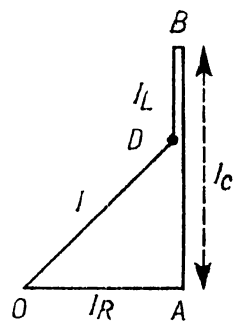


FIG. 9-36.

L'allure de ce dernier s'obtient en remarquant qu'à fréquence constante le flux maximal est proportionnel à la tension U (1). Dès lors le graphe $I_L(U)$ est, aussi bien pour la bobine le graphe $I(\Phi)$. Il est donc, compte tenu des échelles, le graphe $H(B)$ dans le fer du noyau.

(1) On a $\Phi = \Phi_m \cos \omega t$; $u = e = -n\, d\Phi/dt = n\omega\Phi_m \sin \omega t$ d'où :

$$U = U_m/\sqrt{2} = n\omega\Phi_m/\sqrt{2} = n \times 2\pi f\Phi_m/\sqrt{2}.$$

On voit que le flux maximal Φ_m est proportionnel à la tension.

Les *points de fonctionnement* sur ce graphe s'obtiennent en écrivant, à partir de la figure 36 :

$$I^2 = J^2 + I_R^2 = J^2 + U^2/R^2$$

soit en divisant par I^2 :

$$1 = J^2/I^2 + U^2/R^2I^2$$

équation d'une ellipse $J(U)$ rapportée à ses axes, ellipse dont les 1/2 axes sont I et RI.

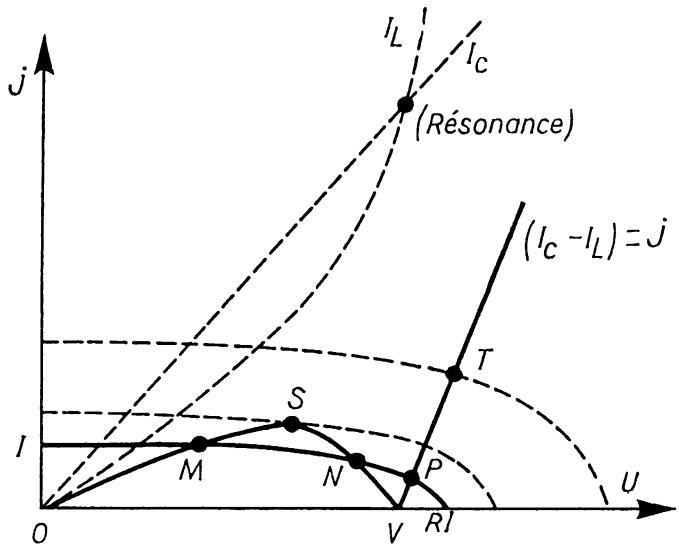


FIG. 9-37.

Les points de fonctionnement M, N, P, sont donc à la rencontre du graphe $J(U)$ déjà tracé et de l'ellipse sus-définie. On montre facilement que seuls les points M et P sont stables.

Dès lors, quand la tension U augmente, le point stable en M atteint le point S, puis saute brusquement sur la portion VT (forte surtension et forte surintensité). On dit alors qu'il y a *chavirement* du régime.

Pour ramener le point de fonctionnement sur la portion OS, il faut abaisser la tension au-dessous de OV.

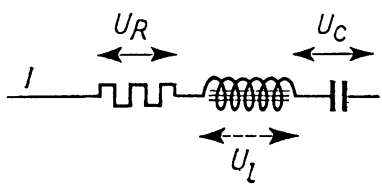


FIG. 9-38.

Ferrorésonance série. Elle se rapporte au cas où les éléments R, L, C sont en série. Son étude est conduite en portant en abscisse les courants et en ordonnée les tensions. Les conclusions sont les mêmes que dans la ferrorésonance en parallèle.

La ferrorésonance donne lieu à des incidents (déplacement du point neutre, surtensions, surintensités) dans les réseaux triphasés.

16. Relation entre R,L,C à la résonance. Valeur minimale du courant absorbé. — Lorsque le courant débité par la source est I_{min} (en phase avec U) on a (fig. 39) :

$$I_c = I_s \sin \varphi$$

ou

$$C\omega U = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \times \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

soit :

$$C\omega U = \frac{L\omega U}{R^2 + L^2\omega^2}$$

Dès lors :

$$\frac{L}{C} = R^2 + L^2\omega^2$$

Exprimons maintenant le courant minimal absorbé :

$$I_{min} = I_s \cos\varphi = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \times \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{UR}{R^2 + L^2\omega^2}$$

Faisons le rapport du courant dans la bobine à ce courant minimal :

$$\frac{I_s}{I_{min}} = \frac{U/\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}{UR/R^2 + L^2\omega^2} = \frac{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}{R}$$

et si R^2 est négligeable devant $L^2\omega^2$, on peut écrire :

$$I_s/I_{min} = L\omega_0/R = Q,$$

car la pulsation correspondant à I_{min} est sensiblement celle de la résonance. Le résultat remarquable s'énonce ainsi :

A la résonance les courants dans les deux dérivations sont Q fois plus grands que le courant principal.

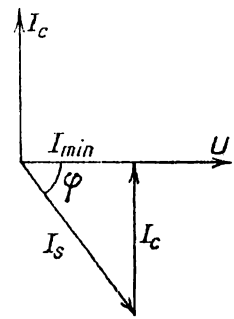


FIG. 9-39.

17. **Propriétés des circuits vis-à-vis des courants de haute fréquence.** — 1° *Effet pelliculaire.* — Cet effet variant dans le même sens que la conductivité, les courants de haute fréquence circulent très bien dans l'intérieur du corps humain dont la conductivité est assez faible, mais l'excitation d'un nerf demandant, pour agir, un temps au moins égal à 10^{-4} s, on peut faire passer dans le corps humain des courants de plus de 2 A sans danger, lorsque la fréquence est supérieure à 10^4 Hz (d'Arsonvalisation, diathermie, bistouri électrique).

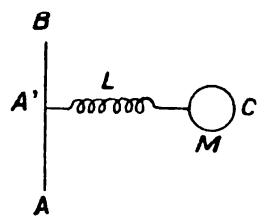


FIG. 9-40.

2° *Production de courants de conduction unipolaires.* — Soit une portion AB (fig. 40) d'un circuit à haute tension. Désignons par U le potentiel par rapport au sol d'un point A' auquel nous connectons une bobine d'inductance L en série avec une masse M dont la capacité est C par rapport au sol.

Comme U est élevé, si la pulsation ω de cette tension est grande, le courant $I = C\omega U$ circulant entre la masse M et le sol ne sera pas négligeable : il y aura courant entre A' et M sans conducteur apparent de retour. On dit qu'il y a ***conduction unipolaire.***

MÉTHODE SYMBOLIQUE

Nous avons montré comment les grandeurs sinusoïdales se représentent naturellement par des vecteurs. Or, il existe une notation qui permet de donner à la grandeur vectorielle une expression à laquelle s'applique le calcul algébrique. Cette notation dite *imaginaire* ou *symbolique* s'est donc introduite tout naturellement dans l'électrotechnique des courants sinusoïdaux et conduit à une méthode simple et précise de résolution des problèmes sur les courants alternatifs. Nous en exposerons ici les fondements.

18. **Expression imaginaire d'un vecteur.** — Soient a et b (fig. 41) les projections d'un vecteur $\vec{V}$ sur deux axes rectangulaires $x'x$, $y'y$. Appelons $x'x$ l'axe *réel* ; $y'y$ l'axe *imaginaire*.

Si nous fixons sur chacun de ces axes un sens positif, le vecteur $\vec{V}$ est parfaitement défini par ses deux projections a et b en grandeur et en signe. Dès lors, on a eu l'idée de l'exprimer ainsi :

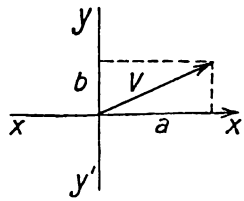


Fig. 9-41.

$$\overline{V} = a + jb ;$$

a désignant la partie *réelle* (portée suivant l'axe réel $x'x$) ;

b désignant la partie *imaginaire* (portée suivant l'axe imaginaire $y'y$) de l'expression *imaginaire* $\overline{V}$ du vecteur $\vec{V}$ (on dit aussi expression *complexe*), la lettre j écrite à côté de la composante verticale signifiant que la longueur b a été portée suivant l'axe imaginaire.

Afin de bien fixer le quadrant dans lequel se trouve le vecteur dont on donne l'expression imaginaire, on convient de porter :

les parties réelles positives dans le sens Ox ;

les parties imaginaires positives dans le sens Oy.

Exemples (fig. 36) :

$$\overline{V}_1 = 4 - j3$$
$$\overline{V}_2 = -2 + j4$$
$$\overline{V}_2 = 3 + j2.$$

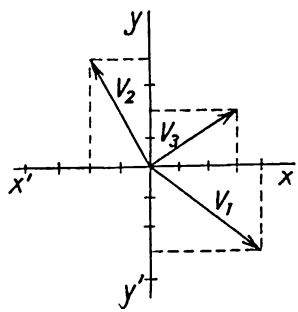


Fig. 9-42.

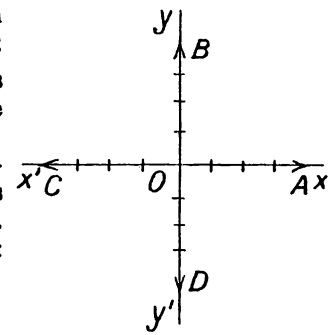


Fig. 9-43.

19. **j est un facteur rotateur. Sa valeur algébrique est $\sqrt{-1}$.** — Étant donné que (fig. 43) :

le nombre algébrique 4 représente $\overrightarrow{OA}$;
le nombre algébrique j4 représente $\overrightarrow{OB}$;
le nombre algébrique — 4 représente $\overrightarrow{OC}$;
le nombre algébrique — j4 représente $\overrightarrow{OD}$;

il en résulte que :

1° Multiplier un vecteur horizontal par j revient à le faire tourner de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens antihoraire ;

2° Multiplier un vecteur horizontal par — j revient à le faire tourner de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens horaire ;

3° Multiplier un vecteur par j^2 revient à le faire tourner de $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.

On a donc :

$$4j^2 \equiv OC \equiv -OA \equiv -4,$$

d'où :

$$j^2 \equiv -1.$$

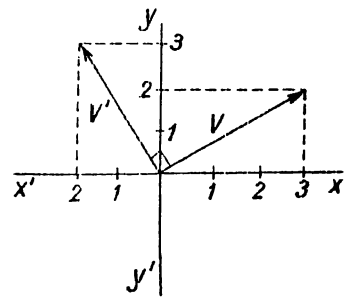


FIG. 9-44.

Dès lors, si on considère j comme un facteur soumis aux règles du calcul algébrique et si l'on admet que $j^2 = -1$, j est un *facteur rotateur* qui a pour propriété de faire tourner de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens antihoraire tout vecteur horizontal qu'il multiplie.

Cette propriété est évidemment vraie pour un vecteur vertical. Il est facile de montrer qu'elle est vraie pour un vecteur quelconque. En effet, multiplier par j chacun des termes de l'expression symbolique d'un vecteur revient à faire tourner de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens antihoraire chacune des composantes de ce vecteur et l'on voit (fig. 44) que ce vecteur lui-même a tourné de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens antihoraire.

De même, la multiplication par j d'un nombre imaginaire revient à faire tourner de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens antihoraire le vecteur que ce nombre représenterait (1).

On sait qu'un nombre négatif n'a pas de racine carrée. $\sqrt{-1}$ ne correspond mathématiquement à rien. C'est pourquoi on dit que $\sqrt{-1}$ est un nombre imaginaire (1).

Nous désignerons par $\overline{V}$ l'expression imaginaire d'un vecteur $\vec{V}$.

20. **Les trois expressions imaginaires d'un vecteur.**

1° *Expression en coordonnées rectangulaires.* — C'est celle que nous avons déjà donnée à partir des projections a et b sur deux axes rectangulaires (fig. 42) :

$$\boxed{\overline{V} = a + jb}$$

2° *Expression trigonométrique* (à partir des coordonnées polaires). — On sait qu'en coordonnées polaires un vecteur est représenté par son *module* ρ (longueur du vecteur) et son *argument* φ (angle formé par ce vecteur avec l'axe horizontal) positif, si, en partant de l'axe horizontal, on tourne dans le sens antihoraire. On peut alors le désigner par : $\rho\angle\varphi$

(1) Il est parfois commode de remplacer — j par 1/j. En effet le produit de (— j) par (j) est égal à 1.

On a, quel que soit φ (fig. 45) :

(1) $$a = \rho \cos \varphi ;$$

(2) $$b = \rho \sin \varphi ;$$

(3) $$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} ;$$

avec $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$; $\cos \varphi = \frac{a}{\rho}$.

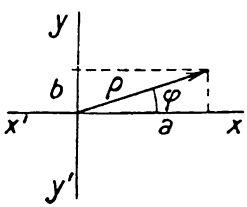


Fig. 9-45.

On en déduit :

$$\overline{V} = a + jb = \rho \cos \varphi + j\rho \sin \varphi,$$

soit :

$$\boxed{\overline{V} = \rho (\cos \varphi + j \sin \varphi)}$$

La grandeur $\cos \varphi + j \sin \varphi$ est appelée *opérateur* φ. Nous écrirons $\rho \angle \varphi$ et nous lirons « ρ opérateur φ ».

3° *Expression exponentielle imaginaire.* — En posant $j = \sqrt{-1}$. Euler a démontré l'égalité :

$$\cos \varphi + j \sin \varphi = e^{j\varphi} ;$$

$$\cos \varphi - j \sin \varphi = e^{-j\varphi} ;$$

e désignant la base des logarithmes népériens. On peut donc écrire :

$$\boxed{\overline{V} = \rho e^{j\varphi}}$$

21. **Représentation vectorielle et imaginaire des grandeurs électriques.** — Nous avons vu (page 192) que le module d'un vecteur de Fresnel associé à une grandeur courant ou tension était la valeur efficace de cette grandeur, car sa mesure est plus facile que celle de la valeur maximale.

Nous prendrons la même convention relativement au nombre complexe associé à une grandeur sinusoïdale de pulsation ω. Son module sera égal à la valeur efficace de cette grandeur. Son argument sera égal au déphasage de la grandeur considérée sur la grandeur de référence.

Exemple : prenons comme référence la tension $v(t) = V\sqrt{2} \sin \omega t$ appliquée à un récepteur dont l'impédance a un argument φ. Le courant qui le traverse vaut donc $i(t) = \sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi)$ avec $I = V/Z$

les vecteurs de Fresnel associés seront respectivement V à placer horizontalement, et I déphasé de φ radians en arrière sur V ; nous avons donc l'angle orienté $\varphi = (\vec{I}, \vec{V})$

les nombres complexes associés seront respectivement :

$\overline{V} = V \exp j0 = V$ nombre réel, et
$\overline{I} = I \exp (-j\varphi) = I (\cos \varphi - j \sin \varphi)$.

Opérations sur les nombres complexes

22. **Addition et soustraction.** — Puisque les parties réelles d'une part, les parties imaginaires d'autre part sont, dans les nombres complexes portées par le même axe, l'addition et la soustraction de ces nombres, s'effectue en opérant indépendamment sur les termes réels et sur les termes imaginaires.

Soient deux nombres complexes :

$$\overline{V_1} = a_1 + jb_1 ;$$
$$\overline{V_2} = a_2 + jb_2.$$

Leur somme sera le nombre complexe :

$$\overline{V} = \overline{V_1} + \overline{V_2} = a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2).$$

On sait que le vecteur représentatif du nombre complexe $\overline{V}$ est la somme géométrique des vecteurs représentant $\overline{V_1}$ et $\overline{V_2}$.

D'où les règles suivantes :

A) A la somme géométrique de vecteurs représentant des grandeurs, on peut substituer l'addition des nombres complexes exprimant ces mêmes grandeurs. Dès lors :

Toutes les opérations algébriques que nous effectuerons sur les expressions imaginaires de grandeurs sinusoïdales équivalent aux constructions géométriques que nous avons faites avec les vecteurs représentant ces grandeurs.

B) Quand un nombre complexe est égal à la somme de plusieurs nombres complexes :

a) la partie réelle est égale à la somme des parties réelles ;

b) la partie imaginaire est égale à la somme des parties imaginaires.

C) Quand deux nombres complexes sont égaux, leurs parties réelles sont égales, leurs parties imaginaires sont égales.

23. **Multiplication.**

a) *Produit de deux nombres complexes en* $a + jb$.

Il s'effectue, comme un produit de binômes. Il suffit ensuite de remplacer j^2 par -1 et d'ordonner les termes réels et imaginaires :

$$\overline{V} = \overline{V_1}\overline{V_2} = a_1a_2 + j^2b_1b_2 + ja_1b_2 + ja_2b_1 = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1).$$

b) *Produit de deux nombres complexes en expression exponentielle.* — Il est particulièrement simple. Soit à multiplier :

$$\overline{V_1} = \rho_1 e^{j\varphi_1} \qquad \text{par} \qquad \overline{V_2} = \rho_2 e^{j\varphi_2}.$$

On a :

$$\overline{V_1}\overline{V_2} = \rho_1\rho_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Le produit de deux nombres imaginaires a pour module le produit des modules et pour argument la somme des arguments.

REMARQUE. — Multiplier une expression imaginaire par $\lfloor\varphi$ revient à faire tourner de l'angle φ (dans le sens antihoraire) le vecteur que cette expression représente. En effet l'opérateur φ a pour expression imaginaire :

$$e^{j\varphi}.$$

Donc :

$$\rho_1 e^{j\varphi_1} \times e^{j\varphi} = \rho_1 e^{j(\varphi_1+\varphi)},$$

le module est resté le même ; l'argument est augmenté de φ. Donc le vecteur que représenterait l'expression imaginaire a tourné de l'angle φ dans le sens antihoraire.

24. **Division.**

a) *Division de deux nombres complexes en* $a + jb$. — Elle s'effectue comme une division de binômes :

$$\frac{\overline{V_1}}{\overline{V_2}} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2}$$

mais pour que le quotient prenne la forme $a + jb$, on multiplie les deux termes de la fraction par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$\frac{\overline{V_1}}{\overline{V_2}} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + j(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2},$$

$$\frac{\overline{V_1}}{\overline{V_2}} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j\,\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

b) Division de deux nombres complexes en expression exponentielle :

$$\frac{\overline{V_1}}{\overline{V_2}} = \frac{\rho_1 e^{j\varphi_1}}{\rho_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\, e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Le quotient de deux nombres imaginaires a pour module le quotient des modules et pour argument la différence des arguments.

REMARQUE. — Exprimons l'inverse d'un nombre complexe :

$$\frac{1}{\rho e^{j\varphi}} = \frac{1}{\rho} e^{-j\varphi}.$$

L'inverse d'un nombre imaginaire est un autre nombre imaginaire qui a pour module l'inverse du module et pour argument l'argument changé de signe.

25. **Dérivation.** — Dans le *cas particulier* où la quantité imaginaire représente une *grandeur sinusoïdale* de pulsation ω, on obtient sa dérivée en la multipliant par $j\omega$.

En effet, une grandeur sinusoïdale :

$$i = I_m \sin \omega t$$

a pour dérivée :

$$\frac{di}{dt} = I_m \omega \cos \omega t = I_m \omega \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Dès lors, si la grandeur sinusoïdale est représentée par $\bar{I}$, sa dérivée sera représentée par $j\omega\bar{I}$.

Application des nombres complexes à l'électrotechnique

26. **Principes généraux.** — En électrotechnique, pour appliquer la méthode symbolique, on exprime à l'aide de nombres complexes les vecteurs courant, tension, induction, flux, etc., en leur donnant pour modules les valeurs efficaces lorsqu'il s'agit de courants ou de tensions, les valeurs maximales lorsqu'il s'agit d'inductions magnétiques ou de flux.

a) Quand une grandeur sera prise pour *origine des phases* (son vecteur étant dirigé suivant l'axe réel), le nombre qui la représentera sera *réel*.

b) Une grandeur sinusoïdale dont l'expression instantanée est :

$$i = I_m \sin (\omega t + \varphi)$$

est représentée par le nombre complexe :

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} (\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

De même une grandeur :

$$i = I_m \sin (\omega t - \varphi)$$

devient en expression symbolique

$$\bar{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} [\cos (-\varphi) + j \sin (-\varphi)] = \frac{I_m}{\sqrt{2}} (\cos \varphi - j \sin \varphi).$$

EXEMPLE : Expression du courant dans un récepteur de résistance R et de réactance effective $X = L\omega - \frac{1}{C\omega}$. Son impédance complexe est $\overline{Z} = R + jX$, de module $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ et d'argument $\varphi = \text{Arc tg } \frac{X}{R}$.

φ et X sont de même signe.

$\varphi = \text{Arg } \overline{Z} = (\overrightarrow{I}, \overrightarrow{V})$ est > 0 pour un récepteur à dominante inductive et est < 0 pour un récepteur à dominante capacitive.

Si la tension U est prise comme origine des phases, on a :

$$\overline{I} = \frac{U}{\overline{Z}} = \frac{U}{Z \exp j\varphi} = \frac{U}{Z} \exp(-j\varphi)$$

$$\overline{I} = \frac{U}{Z}(\cos\varphi - j \sin\varphi) = \frac{U}{Z}\left(\frac{R}{Z} - j\frac{X}{Z}\right)$$

L'expression $\overline{I} = \frac{U(R - jX)}{R^2 + X^2}$ s'obtient immédiatement en développant le nombre complexe $1/\overline{Z} = \overline{Y}$.

On peut aussi se servir de l'admittance complexe Y et écrire la loi d'Ohm sous la forme

$$\overline{I} = \overline{Y}\,\overline{V}$$

27. **Loi d'Ohm.** — Soit AB (fig. 46) une portion de circuit dont nous désignons par R la résistance, C la capacité, X la réactance effective $L\omega - \frac{1}{C\omega}$ et Z l'impédance. Sous l'action de la D. D. P. U entre A et B, il circule dans cette portion un courant I déphasé, par rapport à U, de l'angle φ tel que (fig. 47) :

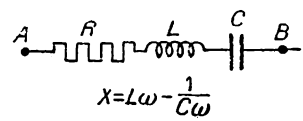


FIG. 9-46.

$$U = ZI \qquad \cos\varphi = \frac{R}{Z} \qquad \sin\varphi = \frac{X}{Z}.$$

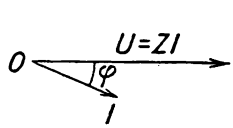


FIG. 9-47.

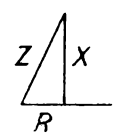


FIG. 9-48.

Il apparaît qu'à partir du vecteur courant I, il faut, pour obtenir le vecteur tension U :

faire tourner de φ le vecteur courant ;

multiplier ce vecteur par Z.

L'expression imaginaire de $\vec{U}$ s'obtient donc en multipliant l'expression imaginaire de $\vec{I}$ par Z (cos φ + j sin φ). On a donc :

$$\overline{U} = \overline{I} \times Z (\cos \varphi + \mathrm{j} \sin \varphi) = \overline{I} \times Z \left(\frac{R}{Z} + \mathrm{j} \frac{X}{Z}\right) = \overline{I}(R + \mathrm{j}X).$$

L'expression $R + \mathrm{j}X$ ou $Ze^{\mathrm{j}\varphi}$ est appelée *impédance imaginaire.* Le vecteur correspondant (fig. 48) est l'impédance *vectorielle* (tandis que l'expression $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ n'est autre que l'impédance *ordinaire*). Nous poserons donc :

$$\overline{Z} = Ze^{\mathrm{j}\varphi} = R + \mathrm{j}X$$

et la loi d'Ohm, en expression imaginaire, s'écrit :

$$\overline{U} = \overline{Z}\overline{I}.$$

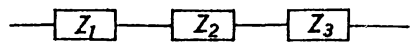


FIG. 9-49.

28. **Conséquence : formules applicables aux récepteurs en série et en parallèle.** — De même qu'en courant continu, à partir de la formule $U = RI$, nous avons obtenu les formules relatives aux récepteurs en série et en parallèle, de même nous obtiendrons, dans le cas de courants alternatifs, les formules applicables aux récepteurs en série et en parallèle en expressions imaginaires.

1° *Récepteurs en série.* — L'impédance équivalente imaginaire $\overline{Z_e}$ de plusieurs récepteurs en série est égale à la somme des impédances imaginaires de ces récepteurs (fig. 49) :

$$\overline{Z_e} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2} + \overline{Z_3} = \Sigma \overline{Z}.$$

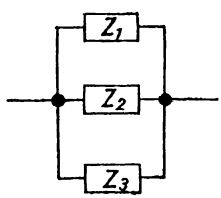


FIG. 9-50.

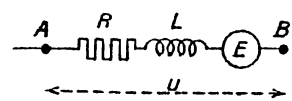


FIG. 9-51.

2° *Récepteurs en parallèle.* — L'admittance équivalente imaginaire $\frac{1}{\overline{Z_e}}$ de plusieurs récepteurs en parallèle est égale à la somme de leurs admittances (fig. 50) :

$$\frac{1}{\overline{Z_e}} = \frac{1}{\overline{Z_1}} + \frac{1}{\overline{Z_2}} + \frac{1}{\overline{Z_3}} = \Sigma \frac{1}{\overline{Z}}.$$

29. **Loi d'Ohm applicable à une portion de circuit renfermant un générateur.** — Soit AB (fig. 52) une portion de circuit de résistance totale R, inductance L, comportant un générateur. En courant continu nous avons obtenu pour une telle portion de circuit la relation :

$$RI = (V_A - V_B) + E,$$

I désignant le courant dans cette portion et E la F. É. M. du générateur. Soit, en posant $V_A - V_B = U$:

$$RI = U + E.$$

Appliquons la même relation au courant alternatif i qui circulerait entre A et B, mais en tenant compte de la F. É. M. d'autoinduction :

$$Ri = u + e - L\frac{di}{dt} \qquad (u, e, i = \text{valeurs instantanées})$$

ou :

$$Ri + L\frac{di}{dt} = u + e,$$

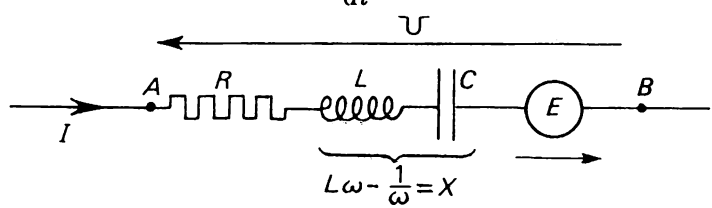


Fig. 9-52.

équation qui devient, en grandeur vectorielle :

$$\vec{RI} + \vec{L\omega I} = \vec{U} + \vec{E},$$

et dans laquelle nous devons substituer la réactance effective $X = L\omega - \frac{1}{C\omega}$ à la réactance d'induction $L\omega$, si la portion de circuit (fig. 52) est douée de capacité. Nous avons donc, dans le cas où la portion de circuit renferme un générateur :

$$\vec{RI} + \vec{XI} = \vec{U} + \vec{E};$$

soit, en expression imaginaire :

$$\overline{ZI} = \overline{U} + \overline{E}.$$

30. **Première loi de Kirchhoff.** — Nous avons démontré en courant continu que si l'on considère un nœud A (fig. 53) et si l'on affecte, par exemple, du signe + tout courant qui se dirige vers A, du signe — tout courant qui s'éloigne de A, on a :

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0.$$

En courant alternatif, la même relation est vraie en expression instantanée :

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 0$$

qui devient en représentation vectorielle :

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 + \vec{I}_4 + \vec{I}_5 = 0$$

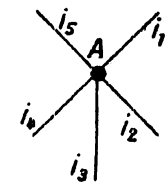


FIG. 9-53.

et lorsque ces vecteurs seront représentés en notation symbolique, la même équation s'écrira :

$$\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 + \overline{I}_4 + \overline{I}_5 = 0$$

ou :

$$\Sigma \overline{I} = 0.$$

31. **Deuxième loi de Kirchhoff.** — Soit une maille *ABCDA* (fig. 49) d'un réseau à courant alternatif. Dans chaque branche, il peut y avoir un ou plusieurs générateurs engendrant une F. É. M. résultante.

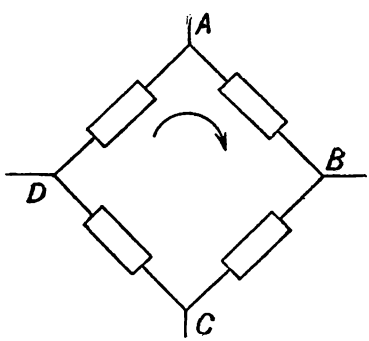


FIG. 9-54.

Prenons un sens de parcours arbitraire. Dans chaque branche, nous pouvons écrire une expression de la forme :

$$\overline{E} + \overline{U} = \overline{Z}\overline{I}.$$

La somme de toutes ces expressions nous donne :

$$\Sigma \overline{E} + \Sigma \overline{U} = \Sigma Z \overline{I}.$$

Mais la somme des chutes de tension dans les branches d'une maille est nulle. Donc $\Sigma U = 0$. Par suite l'équation précédente se réduit à :

$$\Sigma \overline{E} = \Sigma Z \overline{I},$$

qui traduit la deuxième loi de Kirchhoff s'appliquant aux réseaux alternatifs, et aux expressions imaginaires des grandeurs électriques.

32. **Conclusion générale.** — Toutes les formules des réseaux à courant continu sont applicables aux circuits alternatifs. Il suffit, dans ces formules, de remplacer :

— les tensions U et les F.É.M. E par les grandeurs complexes $\overline{U}$ et $\overline{E}$;

— les courants I par les courants complexes $\overline{I}$;

— les résistances R par les impédances complexes $\overline{Z}$ et d'exprimer ensuite toutes ces grandeurs complexes en adoptant l'une d'elles, soit U ou E, soit I comme origine des phases.

On aperçoit donc l'intérêt considérable de la méthode symbolique qui est devenue la plus couramment appliquée dans la résolution des problèmes sur les circuits à courants alternatifs.

CHAPITRE 10

PUISSANCE DES COURANTS ALTERNATIFS

Nous nous placerons tout d'abord dans le cas des courants sinusoïdaux.

Puissance totale. Puissance aux bornes

1. Distinction entre les puissances totales mises en jeu dans un générateur et dans un récepteur. — Nous avons montré [1] qu'en prenant, dans un circuit, pour sens positif de parcours le sens du courant, une *F. É. M.* faisant brusquement remonter le potentiel dans le sens du courant, c'est-à-dire agissant dans le sens *positif*, caractérise un *générateur* et est affectée du signe + ; une *F. C. É. M.* faisant brusquement baisser le potentiel quand on suit le sens du courant, autrement dit agissant dans le sens *négatif*, caractérise un *récepteur* et est affectée du signe (—) (fig. 1). La conséquence est la suivante :

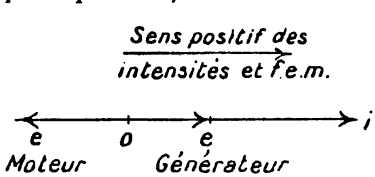


FIG. 10-1.

Toute puissance électrique *ei* positive caractérise un générateur.

Toute puissance électrique *ei* négative caractérise un récepteur.

2. Puissance totale mise en jeu dans un générateur ou un récepteur. — Soit :

$$e = E_m \sin \omega t$$

la F. É. M. développée par un appareil et :

$$i = I_m \sin (\omega t + \psi)$$

l'intensité du courant qui le parcourt. Dans un intervalle de temps infiniment court dt, l'énergie dW mise en jeu dans l'appareil est la même que si la F. É. M. et l'intensité étaient constantes :

$$dW = ei\, dt.$$

[1] Du même auteur *Électricité fondamentale*, Dunod.

L'énergie mise en jeu au cours d'une période T sera donc :

$$W = \int_0^T ei \, dt.$$

La puissance totale, en courant alternatif, sera la puissance constante

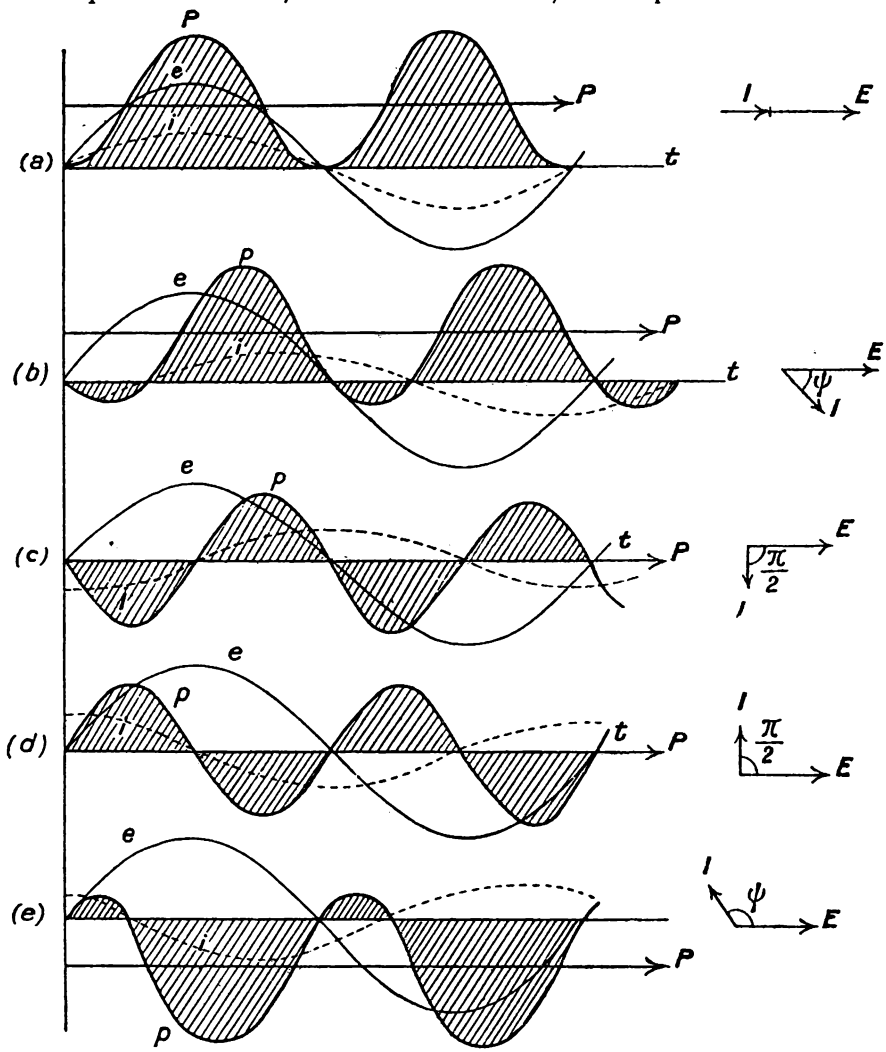


FIG. 10-2.

qui, en courant continu, développe, au cours d'une période, la même énergie. C'est donc la puissance *moyenne* au cours de la période :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T ei \, dt = \frac{1}{T}\int_0^T E_m I_m \sin \omega t \sin (\omega t + \psi) \, dt$$

que l'on peut écrire :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{E_m I_m}{2}\cos\psi - \frac{E_m I_m}{2}\cos(2\omega t + \psi)\right] dt,$$

soit :
$$P = \frac{E_m I_m}{2}\left[\cos\psi\,\frac{1}{T}\int_0^T dt - \frac{1}{T}\int_0^T \cos(2\omega t + \psi)\,dt\right].$$

Le deuxième terme entre crochets est nul : il représente en effet la valeur moyenne d'une grandeur sinusoïdale dans l'intervalle d'une double période $\left(\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ et } 2\omega = \frac{2\pi}{\frac{T}{2}}\right)$. Donc enfin :

$$P = \frac{E_m I_m}{2}\cos\psi = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \times \frac{I_m}{\sqrt{2}}\cos\psi = EI\cos\psi.$$

3. **Représentation cartésienne de la puissance totale mise en jeu.** — Traçons en coordonnées (fig. 2) cartésiennes les graphes de la F. É. M. e, du courant i, de la puissance instantanée p relative à un appareil. Il apparaît que, sauf le cas particulier où l'on a $\psi = 0$ et où la puissance instantanée est toujours positive, donc toujours fournie :

1° La puissance *instantanée* p est tantôt positive, tantôt négative, donc *tantôt fournie* par l'appareil, *tantôt reçue* par lui ;

2° La puissance *moyenne* P est positive (donc correspond à un fonctionnement en générateur) lorsqu'on a : $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$. Elle est négative (fonctionnement en moteur) lorsqu'on a $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$;

3° Dans le cas particulier où ψ est égal à $\pi/2$ (circuit d'inductance ou de capacité pures), la puissance moyenne est nulle. Au cours d'une période, l'énergie fournie (aire positive hachurée) est égale à l'énergie reçue (aire négative hachurée).

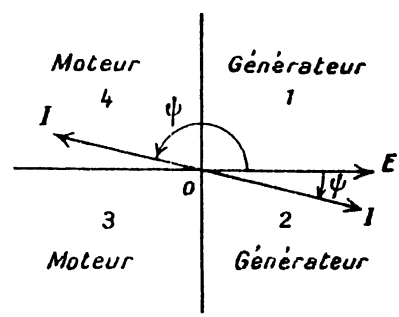


Fig. 10-3.

De là, nous pouvons conclure, en considérant les positions relatives des vecteurs E et I d'un appareil, en prenant par exemple la F. É. M. E pour origine des phases :

si le vecteur I est dans les quadrants 1 ou 2, l'appareil est un générateur (fig. 3) ;

si le vecteur I est dans les quadrants 3 ou 4, l'appareil est un récepteur.

Le déphasage ψ entre E et I permet donc de distinguer, suivant qu'il est, en valeur absolue, inférieur ou supérieur à $\frac{\pi}{2}$, entre les fonctionnements en générateur ou en moteur d'une même machine.

4. **Puissance aux bornes d'un générateur ou d'un récepteur.** — Nous avons montré que la puissance électrique *fournie* par un générateur ou *absorbée* par un récepteur a pour expression instantanée le produit *ui* des valeurs instantanées du courant dans l'appareil et de la tension entre ses bornes.

Un calcul analogue au précédent (remplacer e par u et ψ par φ) nous conduirait à l'expression de la valeur moyenne de cette puissance :

$$\underset{\text{watts}}{P} = \underset{\text{volts}}{U} \quad \underset{\text{ampères}}{I} \cos\varphi$$

U = D. D. P. efficace entre les bornes ; I = valeur efficace du courant dans l'appareil (ou la portion de circuit) ; φ = déphasage entre U et I.

5. **Existence d'une énergie fluctuante.** — La représentation graphique de la puissance instantanée p (fig. 2) est celle d'une sinusoïde dont l'axe des abscisses est décalé, par rapport à l'axe des temps, d'une longueur égale à $EI\cos\psi$. Donc, si l'appareil considéré fonctionne en générateur, la puissance électrique totale qu'il développe est formée :

a) D'une puissance *constante* toujours fournie $EI\cos\psi$;

b) D'une puissance *sinusoïdale* à la fréquence $2f$ (f = fréquence de la F. É. M. E). Celle-ci, pendant une moitié de sa propre période, met en jeu une énergie positive, donc fournie. Cette énergie est passée *d'une certaine forme* à la forme électrocinétique. Pendant l'autre moitié de sa période, cette puissance sinusoïdale met en jeu une énergie négative, donc absorbée, égale à la précédente : c'est dire que l'énergie électrocinétique précédente a entièrement repris sa forme primitive.

En définitive, tout se passe comme si, en plus d'une énergie fournie à puissance constante (comme en courant continu), existait une énergie passant alternativement et intégralement de la forme électrocinétique à une autre forme et réciproquement. Nous appellerons cette dernière : *énergie fluctuante.*

6. **Origine de l'énergie fluctuante.** — Quelle est la forme prise par l'énergie fluctuante quand elle perd la forme électrocinétique ? Pour le savoir, plaçons-nous dans le cas où cette énergie existe seule ($\cos\psi = 0$) et cherchons sa valeur pendant une demi-période $T/4$ de l'énergie fluctuante.

a) $\psi = -\frac{\pi}{2}$. *Circuit purement inductif.*

$$W_a = \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{E_m I_m}{2} \cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}t = \frac{E_m I_m}{2} \int_0^{\frac{T}{4}} \sin 2\omega t \, \mathrm{d}t.$$

Or, la résistance du circuit étant nulle, on a, à ce moment :

$$e - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

ou :

$$e = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},$$

et :

$$E_m = L\omega I_m ;$$

L désignant l'inductance de tout le circuit.

D'où, en remarquant que $T/4 = \frac{\pi}{2\omega}$:

$$W_a = \frac{L\omega I_m \times I_m}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2\omega}\right) [\cos 2\omega t]_0^{\frac{\pi}{2\omega}} = \frac{1}{2} L\omega I_m^2 \times \frac{1}{\omega} = \frac{1}{2} L I_m^2.$$

C'est l'expression de l'énergie électromagnétique [7-11] emmagasinée (pendant la croissance du courant de zéro à I_m) dans l'ensemble des flux magnétiques que ce courant engendre dans tout le circuit et qui est rendue, en repassant sous la forme électrique, pendant la décroissance du courant de I_m à zéro.

b) $\psi = +\frac{\pi}{2}$. *Circuit ne comprenant que la capacité* (capacité C).

$$W_c = \frac{E_m I_m}{2} \int_0^{\frac{T}{4}} \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}t = -\frac{E_m I_m}{2} \int_0^{\frac{T}{4}} \sin 2\omega t \, \mathrm{d}t.$$

Or, la loi d'Ohm généralisée appliquée au circuit s'écrit :

$$e - \frac{q}{C} = 0,$$

d'où :

$$q = Ce ;$$

ce qui conduit [9-5] à :

$$I_m = C\omega E_m,$$

d'où :

$$W_c = \frac{-1}{2} C\omega E_m^2 \left[\frac{1}{2\omega} \cos 2\omega t\right]_0^{\frac{\pi}{2\omega}} = \frac{1}{2} C E_m^2.$$

C'est l'expression de l'énergie emmagasinée sous forme électrostatique dans les diélectriques du circuit, puis rendue au circuit sous forme électrocinétique. En définitive :

L'énergie fluctuante est une énergie qui passe alternativement et intégralement de la forme électrocinétique à la forme électromagnétique (dans les champs magnétiques) et électrostatique (dans les champs électriques) de tout le circuit.

7. Analogies mécaniques. — 1° *Débit d'un générateur dans un circuit inductif.* — Considérons un moteur à gaz manchonné (fig. 4) à une machine-outil et à un volant. Le couple du moteur est périodique et sa représentation cartésienne est donnée par la figure 5.

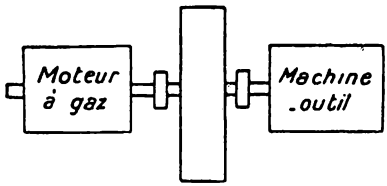


FIG. 10-4.

En marche de régime, le couple moteur *moyen* est égal au couple résistant. Si nous rappelons l'égalité :

Puissance instantanée = couple instantané × vitesse angulaire,

nous observons que la variation du couple (la vitesse angulaire étant sensiblement constante) est aussi bien, par un changement d'échelle, la variation de la puissance instantanée.

Dès lors, tout se passe comme si le moteur fournissait une puissance constante :

P_{moy} = puissance résistante,

mais si, en outre, entre le moteur d'une part, le volant et la machine-outil d'autre part, il se produisait des échanges d'énergie périodiques.

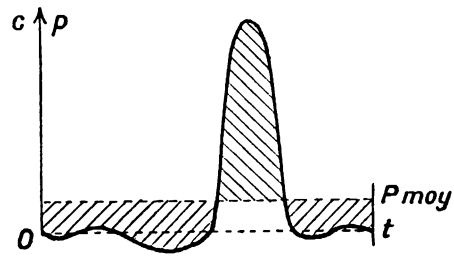


FIG. 10-5.

Les analogies que nous avons soulignées entre l'inductance et l'inertie permettent d'établir une correspondance étroite entre le système mécanique ci-dessus et l'ensemble constitué par l'alternateur et le circuit inductif qu'il alimente.

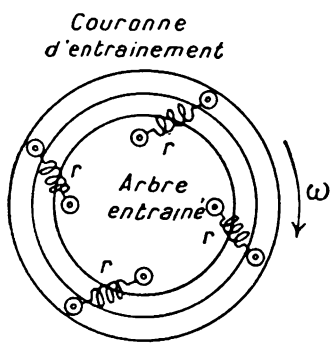


FIG. 10-6.

2° *Débit d'un générateur dans une capacité.* — Supposons maintenant que la liaison entre le moteur et les appareils entraînés soit faite par manchon *élastique* (fig. 6). Lorsque le couple instantané du moteur sera supérieur au couple résistant, les ressorts *r* seront tendus ; ils emmagasineront sous forme potentielle de l'énergie du moteur et restitueront ensuite cette énergie de façon qu'elle s'ajoute à celle du moteur lorsque celui-ci aura un couple inférieur au couple résistant (couple moteur moyen).

Nous avons montré [1] qu'un diélectrique oppose à un champ électrique une véritable réaction élastique et qu'un condensateur se comporte vis-à-vis des courants de déplacement comme un véritable ressort : on saisit l'analogie entre l'énergie élastique périodiquement échangée entre le moteur et le ressort d'accouplement et d'autre part l'énergie électrostatique oscillant entre l'alternateur et le circuit qu'il alimente.

[1] Du même auteur, *Électricité fondamentale*, Dunod.

Puissances active, réactive, apparente

8. **Définitions.** — Soit U la D. D. P. entre les bornes d'un appareil (générateur ou récepteur), I l'intensité du courant qui le traverse, φ le déphasage entre U et I. Par définition, on désignera par :

puissance *active* (engendrée ou absorbée) l'expression $UI \cos \varphi$;

puissance *réactive* (engendrée ou absorbée) l'expression $UI \sin \varphi$;

puissance *apparente* (engendrée ou absorbée) l'expression UI ;

grandeurs qui sont toutes trois homogènes à une puissance.

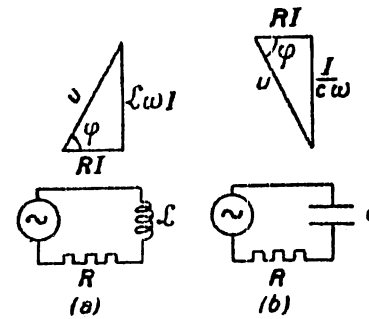


FIG. 10-7.

Explication de leurs dénominations. — *a*) La puissance *active* est la puissance moyenne, toujours fournie ou toujours absorbée. C'est elle qui, à un rendement près, sera utilisable, susceptible d'être transformée en puissance mécanique.

b) La puissance *réactive* est liée à l'énergie électromagnétique $\frac{1}{2} LI_m^2$ et à l'énergie électrostatique $\frac{1}{2} CU_m^2$ emmagasinées puis restituées par le circuit lorsque la tension maximale de l'alternateur est U_m et l'intensité maximale I_m. On a en effet :

$$\frac{1}{\omega} UI \sin \varphi = \frac{1}{\omega} \cdot U \sin \varphi \times I = \frac{1}{\omega} \cdot L\omega I \times I = LI^2 = \frac{1}{2} LI_m^2$$

(fig. 7 *a*)

$$\frac{1}{\omega} UI \sin \varphi = \frac{1}{\omega} \times \frac{I}{C\omega} \times I = \frac{1}{\omega} \frac{I^2}{C\omega} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{C^2\omega^2 U'^2}{C\omega} = CU'^2 = \frac{1}{2} CU_m'^2$$

(fig. 7 *b*)

(U' = tension aux bornes de la capacité).

Le mot puissance *magnétisante* rappelle cette proportionnalité en ce qui concerne l'énergie emmagasinée sous forme magnétique puis restituée ; le mot puissance *réactive* rappelle que les absorptions et restitutions d'énergie sont les manifestations des *réactions* d'une inductance contre les croissances et décroissances du courant [7-2] ou d'une capacité contre les croissances et décroissances de la tension.

c) Le nom de puissance *apparente* vient de ce que le produit UI n'est pas une puissance en général.

La puissance réactive, comme la puissance apparente, n'est pas physiquement une puissance. La définition de cette grandeur se justifie par les services considérables qu'elle rend en Électricité. Néanmoins, la puissance réactive et la puissance apparente sont *mesurables* : c'est pourquoi on a pu définir leurs unités.

3° *Unités.* — Les unités des différentes puissances sont :
puissance *active* : *watt* (symbole W) ;
puissance *apparente* : *voltampère* (VA) (multiple kilovolt-ampère : kVA) ;
puissance *réactive* : *var* (symbole de : volt-ampère réactif).
Le var est la puissance réactive d'une inductance pure qui absorbe un courant de 1 A *(valeur efficace) lorsqu'elle est soumise à une D. D. P. de* 1 V *(valeur efficace)*

9. **Relations fondamentales entre les puissances active, réactive, apparente.** — Par une opération inverse de la composition des vecteurs représentant des grandeurs sinusoïdales, il est souvent commode de substituer à un courant I dans un circuit à courant alternatif deux courants :

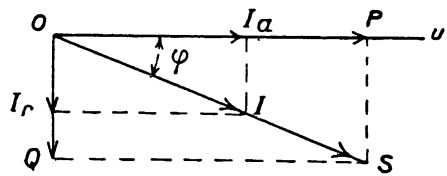


FIG. 10-8.

$I_a = I \cos \varphi$ en phase avec U, appelé courant *actif* ;

$I_r = I \sin \varphi$ en quadrature avec U, appelé courant *réactif.*

En multipliant par U les vecteurs représentatifs, on obtient :
$UI = S$ = puissance apparente ;
$UI_a = P$ = puissance active (ou réelle) ;
$UI_r = Q$ = puissance réactive (ou magnétisante).

La figure 8 met en évidence les relations fondamentales que voici :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P} \qquad \cos \varphi = \frac{P}{S}$$

10. **Une inductance absorbe de la puissance réactive. Une capacité en fournit.** — Considérons un récepteur ayant pour résistance R, pour inductance L, pour capacité C (fig. 21-17). Sous la tension sinusoïdale U, il consomme une puissance active :

$$P = UI \cos \varphi = I \times U \cos \varphi = I \times RI = RI^2 \quad \text{(fig. 9-18).}$$

Cette puissance est *positive*, elle est *absorbée* par le récepteur.

La puissance réactive correspondante a pour expression :

$$Q = UI \sin \varphi = I \times U \sin \varphi = I \left(L\omega I - \frac{I}{C\omega} \right) = L\omega I^2 - \frac{I^2}{C\omega}.$$

Elle est formée de deux termes :

1° Un terme $L\omega I^2$ *positif* (comme RI^2). C'est ce qui fait dire : une inductance L parcourue par un courant I de pulsation ω *absorbe* une puissance réactive $L\omega I^2$;

2° Un terme $-\frac{I^2}{C\omega}$ *négatif*, c'est-à-dire de signe contraire à la puissance

réactive de l'inductance. C'est pourquoi on dit qu'un condensateur *fournit* une puissance réactive $\frac{I^2}{C\omega}$.

En résumé, si on désigne par U_R, U_L, U_C les tensions aux bornes de la résistance, de l'inductance pure, de la capacité (fig. 9-1), on a :

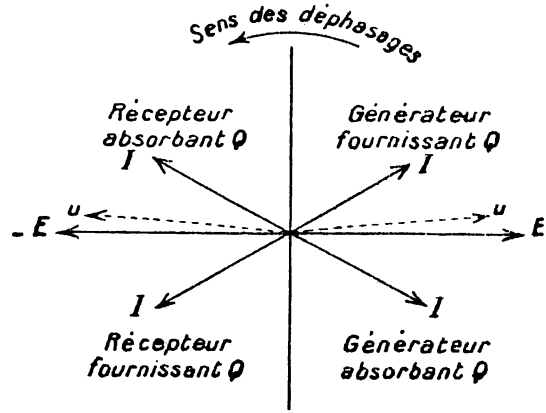


FIG. 10-9.

	Puissance active	Puissance réactive
Résistance :	$RI^2 = \frac{U_R^2}{R}$ (absorbée)	0
Inductance pure :	0	$L\omega I^2 = \frac{U_L^2}{L\omega}$ (absorbée)
Capacité pure :	0	$-\frac{I^2}{C\omega} = -C\omega U_C^2$ (fournie)

Plus généralement, d'un récepteur quelconque (moteur, ensemble d'une installation, etc.), *inductif*, c'est-à-dire dont l'intensité I est déphasée de φ *en retard* par rapport à la tension U, on dira qu'il *absorbe* la puissance réactive UI sin φ et d'un condensateur (déphasage avant) qu'il *fournit* de la puissance réactive UI sin φ.

Cette remarque nous permet de compléter (fig. 9) la figure 8 en indiquant la nature des puissances réactives fournies ou absorbées dans les différentes positions du vecteur I (1).

Observation importante. — Une bobine à noyau de fer consomme une puissance supérieure à RI^2, R désignant sa résistance (2). Cela tient :

a) *A l'effet pelliculaire* [9-14]. La résistance (au sens « effet Joule » du mot) s'en trouve majorée. Cet effet est pratiquement négligeable, à la fréquence industrielle, lorsque la section du cuivre n'est pas très grande.

(1) On remarquera sur cette figure que la tension U est voisine de $+E$ dans un générateur et de $-E$ dans un moteur et qu'ainsi la puissance UI cos φ est positive dans un moteur comme dans un générateur. Nous préciserons ce point dans le tome II.

(2) Précisons : résistance vis-à-vis du courant continu.

b) *Aux pertes dans le fer* P_{fer} (hystérésis et courants de Foucault). La puissance réellement consommée par la bobine est donc :

$$P = RI^2 + P_{fer}$$

et dès lors sa résistance apparente, celle qu'il faut introduire dans les formules de l'impédance et du déphasage relatives à la bobine sera :

$$R_{app} = R + \frac{P_{fer}}{I^2}.$$

Comme P_{fer} n'est généralement pas proportionnel à I^2, R_{app} varie avec le courant dans la bobine.

11. Pourquoi le courant réactif est également appelé courant magnétisant. — Soit une bobine à noyau de fer soumise à une tension sinusoïdale.

1° Si le courant I absorbé par la bobine est sinusoïdal, il peut être représenté par un vecteur et celui-ci est *nécessairement déphasé en avant du flux* (fig. 10).

En effet, nous avons montré [9, 4] que la fém d'induction est déphasée de $\frac{\pi}{2}$ en avant du flux et comme RI est faible devant U, on peut dire que la tension U aux bornes de la bobine est déphasée de $\pi/2$ en avant du flux.

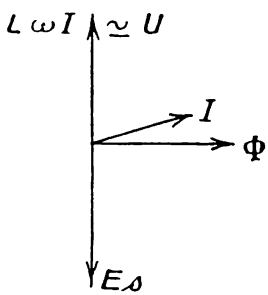


FIG. 10-10 (1).

Le courant I peut-il être en phase avec le flux ? Non, parce que, s'il en était ainsi, la puissance active $UI \cos \varphi$ consommée par la bobine ($\varphi = \pi/2$) serait nulle, ce qui est impossible car la bobine absorbe toujours une puissance active correspondant à ses pertes dans le fer (hystérésis et courants de Foucault).

2° *L'hystérésis déphase le flux en retard sur le courant.* — En effet, si U est sinusoïdal, la F. É. M. d'autoinduction E_a (toujours opposée à U) l'est aussi. Or elle est la dérivée du flux par rapport au temps. Donc le flux est sinusoïdal ainsi que l'induction B.

Considérons un cycle d'hystérésis du fer, cycle correspondant à une période de B. Il représente B en fonction de H ou, aussi bien, B en fonction de i (courant instantané dans la bobine). Si nous traçons côte à côte le cycle $B(i)$ et la sinusoïde $B(t)$, il est facile de tracer la courbe $i(t)$.

Par exemple, en rappelant M' en M, l'abscisse OP du point M n'est autre que l'ordonnée HP du point P qui sur la courbe $i(t)$ donne le courant correspondant à l'induction $B = M'H$. En traçant ainsi point par point la courbe $i(t)$, on voit que du fait de l'hystérésis, non seulement la courbe du courant i est déformée, mais le courant est décalé en avant du flux.

3° *Les courants de Foucault déphasent le flux en retard sur le courant dans la bobine.* — Les courants de Foucault sont des courants *induits dans le fer*. Le flux est dû non seulement à la F. M. M. nI de la bobine,

(1) E_a au lieu de E_s.

mais encore à la F. M. M, $n_2 I_2$ des courants de Foucault. Ces derniers sont en phase [1] avec la F. É. M. E qui les engendre, F.É.M. elle-même déphasée de $\pi/2$ en retard par rapport au flux.

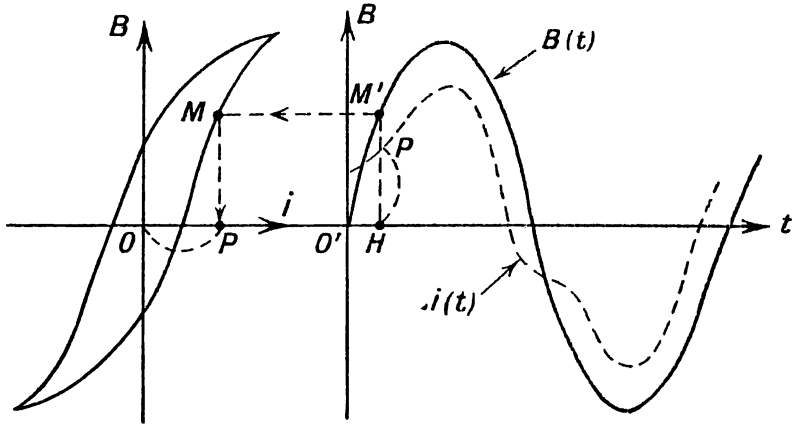


FIG. 10-11.

Le flux est commandé par la F.M.M. F_r. Celle-ci doit être en phase avec lui. Dès lors la figure 12 montre que l'on a :

$$F_r = nI \sin \varphi = nI_r.$$

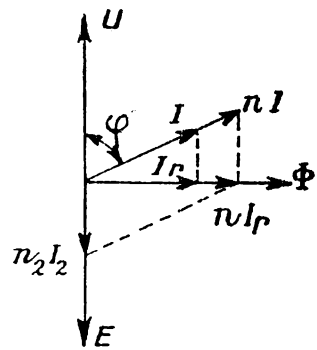


FIG. 10-12.

On voit que les courants de Foucault ont pour effet de déphaser le flux en retard sur le courant dans la bobine. La conclusion importante est celle-ci :

4° *Tout se passe comme si la composante réactive du courant agissait seule pour magnétiser le fer.* — Voilà pourquoi le courant réactif est également appelé courant magnétisant.

12. **Pourquoi la puissance réactive est également appelée puissance magnétisante.** — Puisque le courant réactif $I_r = I \sin \varphi$ est le seul à considérer pour le calcul du flux (vrai ou résultant), nous pouvons écrire, en appliquant la loi d'Hopkinson à la valeur maximum I_{rm} de ce courant :

$$nI_{rm} = \frac{B_m l}{\mu}$$

l = longueur du fer, n = nombre de spires de la bobine,

[1] Parce que le flux Φ est le flux *vrai*, c'est-à-dire compte tenu du flux propre (flux d'autoinduction) dû aux courants de Foucault eux-mêmes. Ayant déjà tenu compte de ce flux propre, nous ne devons pas faire intervenir, dans les circuits Foucault, de chute inductive.

μ = perméabilité absolue du fer (si le circuit magnétique de la bobine ne comporte que du fer) :

$$I_{rm} = \frac{B_m l}{\mu n} \qquad \text{et} \qquad I_r = \frac{B_m l}{\sqrt{2}\mu n}.$$

Pour magnétiser un circuit magnétique donné *à une induction maximale B_m donnée*, il faut donc $I_r = k/n$ (en posant $k = B_m l/\mu\sqrt{2}$).

D'autre part la F. É. M. induite E dans l'enroulement est (à induction B_m constante) proportionnelle au nombre de spires n :

$$E = Kn.$$

Dès lors :

$$EI_r = Kk = \text{constante}.$$

Donc :

Pour magnétiser un circuit magnétique donné à une certaine induction B_m, il faut une puissance réactive déterminée.

D'où le nom de puissance *magnétisante* donné parfois à la puissance réactive. Il est facile de l'exprimer en fonction des données relatives au circuit magnétique. Le flux :

$$\Phi = \Phi_m \sin \omega t = B_m S \sin \omega t$$

(S = section du circuit magnétique) engendre une F. É. M. :

$$e = -u = -n\frac{d\Phi}{dt} = -nB_m S\omega \cos \omega t.$$

D'où :

$$U = \frac{nB_m S\omega}{\sqrt{2}}.$$

Dès lors :

$$UI_r = \frac{B_m l}{\sqrt{2}\mu n} \times \frac{nB_m S\omega}{\sqrt{2}} = \frac{B_m^2 lS\omega}{2\mu} = \boxed{\frac{B_m^2 \rho\omega}{2\mu}}$$

(ρ = volume de substance aimantée).

Par exemple, pour magnétiser à $B_m = 1$ tesla, un volume utile de 1 dm³ de fer à la fréquence 50 Hz et sachant qu'à cette induction B_m la perméabilité relative du fer est $\mu_r = 1\,600$, il faut :

$$UI_r = \frac{1 \times 10^{-3} \times 314}{2 \times 1\,600 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 78{,}5 \text{ vars}.$$

Notons la puissance réactive nécessaire pour magnétiser à 1 tesla et à la fréquence 50 Hz un volume de 1 dm³ d'air :

$$UI_r = 1\,600 \times 78{,}5 = 125\,600 \text{ vars}.$$

13. **Puissance active consommée par un condensateur imparfait.** — 1° *Un condensateur absorbe toujours un peu de puissance active.* — En effet, il y a toujours dans le diélectrique :

a) Des *fuites électriques* dues à la conduction du diélectrique, car aucun isolant n'a une résistance R infiniment grande si on l'emploie en couches minces de grande section. Les pertes correspondantes par effet Joule sont proportionnelles à U^2/R (U = D. D. P. entre les deux faces). On notera qu'elles sont proportionnelles au *carré de la tension* et qu'elles croissent quand le diélectrique s'échauffe, car nous avons montré [10-6] que la résistivité d'un isolant décroît quand sa température s'élève. Un condensateur a une résistance de fuites de l'ordre du mégohm.

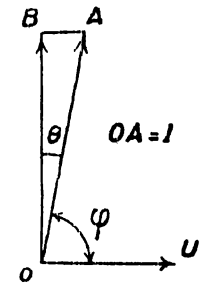


FIG. 10-13.

b) De *l'hystérésis diélectrique* généralement expliquée de la façon suivante : les dipôles du diélectrique polarisé soumis à un champ alternatif tendent à pivoter sur eux-mêmes, mais leur mouvement est freiné par la viscosité du milieu : à ce freinage correspond une dissipation d'énergie.

On peut dire aussi bien : à chaque demi-période, une petite fraction de la tension doit neutraliser la charge résiduelle de signe contraire de la demi-période précédente.

L'énergie de charge de la forme $\frac{1}{2} CU^2$ étant proportionnelle au carré de la tension, il apparaît que les pertes par hystérésis diélectrique sont proportionnelles au *carré de la tension* et à la *fréquence* (1).

Aux fréquences industrielles, ces pertes sont relativement faibles ; de l'ordre de 0,6 à 0,8 % de la puissance apparente pour les condensateurs à diélectrique solide, 5 à 6 % pour les condensateurs électrochimiques.

Dès lors la perte de puissance constatée en courant alternatif est beaucoup plus grande qu'en courant continu.

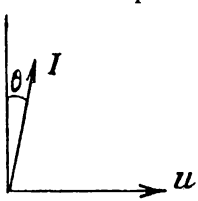


FIG. 10-14.

2° *Cette puissance active est proportionnelle à la permittivité du diélectrique et à son angle de pertes.*

On appelle *angle de pertes* θ d'un condensateur le complément de l'angle de déphasage φ entre U et I (fig. 14).

Exprimons la puissance active absorbée

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos\varphi \qquad \text{avec} \qquad \cos\varphi = \sin\theta \simeq \theta \text{ (fig. 14)}$$

$$P = \frac{U_m}{2} \times C\omega U_m \times \theta = \frac{1}{2} C\omega U_m^2 \theta.$$

Cette puissance est bien proportionnelle à θ.

Dans le cas d'un condensateur-plan, on a :

$$P = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon S}{e} \omega U_m^2 \theta$$

(1) D'autres pertes peuvent intervenir : décharges sombres ou en aigrettes visibles à travers ou autour du diélectrique, vibrations des armatures lorsqu'elles ne sont pas solidement fixées au diélectrique.

et si nous désignons par $E_m = U_m/e$ la valeur maximale du champ électrique entre les armatures :

$$P = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{e}\omega E_m^2 e^2\theta = \frac{1}{2}\varepsilon Se\omega E_m^2\theta = \frac{1}{2}\rho\varepsilon(2\pi f)E_m^2\theta$$

$$P = \pi\rho f E_m^2\varepsilon\theta \qquad (\rho = \text{volume du diélectrique})\ (1).$$

On voit que dans l'expression de la puissance dépensée dans un diélectrique, interviennent à la fois ε et θ.

14. **Puissance active et puissance réactive dans la méthode symbolique.** — Soient U et I la tension et le courant se rapportant à un appareil quelconque. Si nous désignons par :

φ_1 le déphasage de la tension U par rapport à une origine quelconque ;

φ_2 le déphasage du courant I par rapport à la même origine (fig. 15) ;

nous pouvons écrire :

$$\overline{U} = Ue^{j\varphi_1} \qquad \text{et} \qquad \overline{I} = Ie^{j\varphi_2}.$$

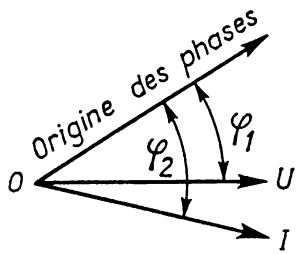


FIG. 10-15.

Faisons le produit de l'expression imaginaire de la tension par la *quantité conjuguée* de l'expression imaginaire du courant :

$$Ue^{j\varphi_1} \times Ie^{-j\varphi_2} = UIe^{j(\varphi_1-\varphi_2)},$$

qui peut s'écrire :

$$UI\,[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

La partie réelle $UI\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ de cette expression n'est autre que la puissance active de l'appareil considéré. La partie imaginaire $UI\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$ est sa puissance réactive. D'où la règle :

Si on fait le produit de l'expression imaginaire de la tension par l'expression imaginaire conjuguée de celle du courant :

la puissance *active* est la partie *réelle* du produit ;

la puissance *réactive* est la partie *imaginaire* du produit.

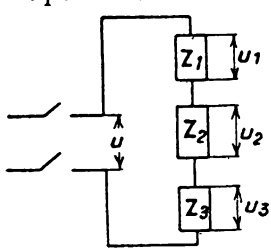


FIG. 10-16.

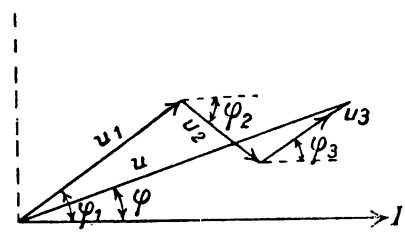


FIG. 10-17.

15. **Théorème de Boucherot.** — *Dans l'ensemble d'un réseau sans changement de fréquence, il y a conservation de la puissance active d'une part, de la puissance réactive d'autre part.*

Nous ne donnerons pas ici la démonstration générale de ce théorème, mais nous vérifierons sa validité dans deux cas particuliers.

(1) tg θ varie entre 10^{-2} et 10^{-4}. On le mesure généralement au pont de Schering.

1° *Récepteurs en série.* — Considérons (fig. 16) trois récepteurs Z_1, Z_2, Z_3, en série, sous la tension U, parcourus par le courant I et ayant entre leurs bornes les tensions U_1, U_2, U_3. Traçons le graphique des tensions (fig. 17) en prenant l'intensité I (grandeur commune) comme origine des phases.

Si φ_1, φ_2, φ_3 et φ désignent les déphasages respectifs de U_1, U_2, U_3 et U par rapport au courant I, la projection des vecteurs tensions sur la direction du vecteur courant et sur l'axe perpendiculaire à ce vecteur nous donne :

$$U\cos\varphi = U_1\cos\varphi_1 + U_2\cos\varphi_2 + U_3\cos\varphi_3$$
$$U\sin\varphi = U_1\sin\varphi_1 + U_2\sin\varphi_2 + U_3\sin\varphi_3$$

et en multipliant par I :

$$UI\cos\varphi = U_1I\cos\varphi_1 + U_2I\cos\varphi_2 + U_3I\cos\varphi_3$$
$$UI\sin\varphi = U_1I\sin\varphi_1 + U_2I\sin\varphi_2 + U_3I\sin\varphi_3.$$

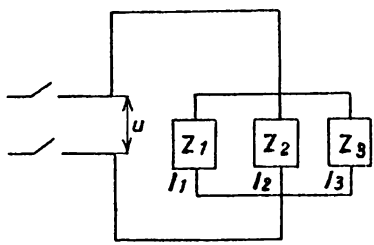


FIG. 10-18.

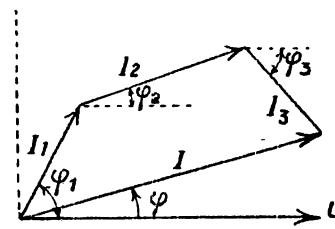


FIG. 10-19.

2° *Récepteurs en parallèle.* — Supposons les mêmes récepteurs en parallèle sous la tension commune U (fig. 18) et soient I_1, I_2, I_3, I, les courants dans chacun d'eux et leur résultante. Traçons le graphique (fig. 19) des courants en prenant la tension U pour origine des phases. Par la projection des vecteurs I sur la direction du vecteur tension U et sur la direction perpendiculaire, nous obtenons les équations :

$$I\cos\varphi = I_1\cos\varphi_1 + I_2\cos\varphi_2 + I_3\cos\varphi_3$$
$$I\sin\varphi = I_1\sin\varphi_1 + I_2\sin\varphi_2 + I_3\sin\varphi_3$$

et en multipliant par U :

$$UI\cos\varphi = UI_1\cos\varphi_1 + UI_2\cos\varphi_2 + UI_3\cos\varphi_3$$
$$UI\sin\varphi = UI_1\sin\varphi_1 + UI_2\sin\varphi_2 + UI_3\sin\varphi_3.$$

On voit que, dans les deux cas, la puissance active fournie par la source est égale à la somme des puissances actives absorbées par les récepteurs ; la puissance réactive de la source est égale à la somme algébrique des puissances réactives absorbées ou fournies par les récepteurs.

Si les récepteurs sont connectés de façon quelconque, on peut toujours les scinder en groupes comportant exclusivement des appareils en dérivation ou en série, puis associer ces groupes eux-mêmes de l'une ou l'autre façon. On conçoit qu'on puisse ainsi, de proche en proche, appliquer à un réseau entier le théorème de Boucherot ; ce théorème exprime en fait qu'une sorte de principe de la conservation de l'énergie s'applique aux puissances actives et aux puissances réactives indépendamment les unes des autres.

16. **Problème du facteur de puissance.** — Lorsqu'un réseau comporte beaucoup de petits moteurs ou bien des moteurs de construction défectueuse, de trop faible vitesse, de puissance trop grande par rapport à leurs conditions d'emploi, le facteur de puissance de l'ensemble des récepteurs peut tomber assez bas.

La faiblesse du facteur cos φ a des inconvénients sérieux. En effet, à puissance active égale :

$$P = UI \cos \varphi$$

produite, transmise ou reçue, le courant est d'autant plus intense que le facteur de puissance est plus faible.

Or, ce qui limite la puissance d'un générateur ou d'un moteur, c'est généralement l'échauffement, lequel impose une *limite supérieure au courant* ; ce qui fixe la *puissance maximale* que peut transmettre une ligne, c'est la chute de tension, laquelle est proportionnelle au *courant.*

Donc, avec un faible facteur de puissance, un générateur, une ligne, un moteur seront *mal utilisés*, c'est-à-dire ne fourniront, ne transmettront ou n'absorberont qu'une fraction de la puissance pour laquelle ils ont été prévus.

Par conséquent, un faible facteur de puissance entraîne :

a) Un supplément de pertes d'énergie (1) par effet Joule (machines, lignes) ;

b) Une immobilisation excessive de capitaux.

Cela explique pourquoi les Compagnies de distribution imposent, soit une pénalisation pour faible facteur de puissance, soit une tarification dans laquelle il est tenu compte de l'énergie réactive consommée.

Il en résulte que, fréquemment, l'exploitant a intérêt à relever le facteur de puissance de son installation.

17. **Relèvement du facteur de puissance.** — Avoir un faible facteur de puissance équivaut à absorber trop de puissance réactive. Pour relever le facteur de puissance de son installation, l'exploitant devra donc lui-même fournir de la puissance réactive. Parmi les appareils qui s'offrent à lui pour atteindre ce résultat, le plus simple et le plus répandu est le *condensateur statique.*

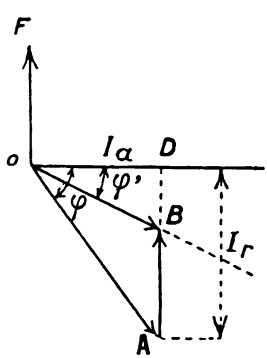


FIG. 10-20.

Le problème à résoudre est donc le suivant : le facteur de puissance d'une installation étant cos φ, déterminer, pour l'élever à la valeur cos φ' les caractéristiques de la batterie de condensateurs nécessaire, c'est-à-dire la puissance réactive $C\omega U^2$ que cette batterie doit être capable de fournir sous la tension U et à la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

1° *Solution graphique.* — Soit I le courant

(1) Perte relative de puissance : $\frac{RI^2}{P} = R \frac{P^2}{U^2 \cos^2 \varphi} \times \frac{1}{P} = \frac{RP}{U^2 \cos^2 \varphi}$.

absorbé par l'abonné Z sous la tension U avec le déphasage φ. Connectons entre ses bornes une batterie de condensateurs de capacité C (fig. 21). Elle absorbera un courant :

$$I_c = C\omega U$$

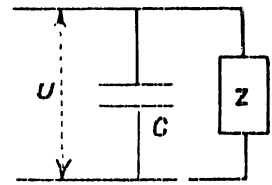


FIG. 10-21.

que nous portons en OF, déphasé de $\frac{\pi}{2}$ en avant de la tension U (fig. 20).

Le courant absorbé par l'installation sera représenté par OB, résultante de OA et de AB ($AB = OF$). On voit qu'à puissance active égale UI_a, le facteur de puissance est passé de φ à $\varphi' < \varphi$ et le courant absorbé OB est plus faible qu'avant l'adjonction des condensateurs.

La solution graphique du problème du relèvement du facteur de puissance à une valeur imposée, se ramène à la résolution d'un triangle tel que OAB dont on connaît un côté OA et les deux angles adjacents.

On mesure à l'échelle : $AB = I_c = C\omega U$.

La puissance apparente (réactive) du condensateur [1] nécessaire sera de : $C\omega U^2 = UI_c$ à la tension U et à la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

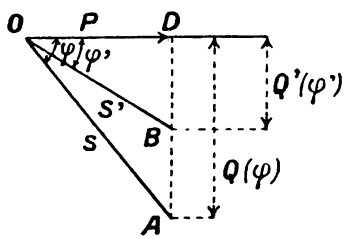


FIG. 10-22.

2° *Solution par la méthode Boucherot.* — Multiplions par U tous les vecteurs du graphique précédent.

Nous avons :

OD = puissance active absorbée par l'installation.

AD = puissance réactive absorbée par l'installation.

$AD = P$ tg φ est connu, puisque φ est connu.

On veut que la puissance réactive prenne la valeur :

$$DB = P \text{ tg } \varphi'.$$

Il faut donc *fournir* au moyen de condensateurs la différence :

$$AD - DB = P \text{ (tg } \varphi - \text{tg } \varphi') = C\omega U \times U = C\omega U^2 \text{ (fig. 22).}$$

La puissance réactive ou apparente du condensateur est donc la différence des puissances réactives absorbées par l'installation avant et après relèvement du facteur de puissance. Nous aurions pu d'ailleurs obtenir immédiatement ce résultat par l'application du théorème de Boucherot.

[1] La puissance réactive d'un condensateur se confond sensiblement avec sa puissance apparente, puisque le courant absorbé par cet appareil est presque entièrement réactif.

18. Mesure de la puissance active d'un courant alternatif.

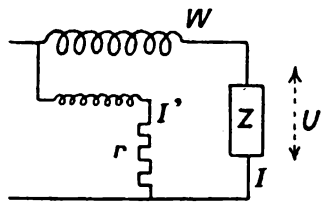


FIG. 10-23.

1° *Wattmètre électrodynamique.* — On peut, en courant alternatif, mesurer une puissance au moyen de trois voltmètres ou de trois ampèremètres, mais, dans la réalité technique, on utilise toujours un *wattmètre* qui est généralement du type *électrodynamique* (1).

Branchons comme l'indique la figure 23, un wattmètre électrodynamique, sur les fils qui aboutissent à un appareil Z (générateur ou récepteur) et entre lesquels existe la D. D. P. alternative U. Soient I et I' les courants dans la bobine fixe gros fil et dans la bobine fil fin.

Nous avons démontré [2-12] que, si i, i' désignent les valeurs *instantanées* des courants I et I', le couple *instantané* c exercé sur la bobine mobile a pour expression :

$$c = K_2 i i'.$$

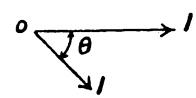


FIG. 10-24.

Prenons le courant i' comme origine des phases (fig. 24) et soit θ le déphasage entre i et i'. Ces courants auront pour expression :

$$i' = I'_m \sin \omega t \qquad \text{et} \qquad i = I_m \sin (\omega t - \theta).$$

D'où :

$$c = K_2 I'_m \sin \omega t \times I_m \sin (\omega t - \theta)$$

et le couple *moyen* a pour expression :

$$C_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T c \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T K_2 I_m I'_m \sin \omega t \sin (\omega t - \theta) \, dt ;$$

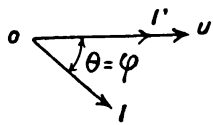


FIG. 10-25.

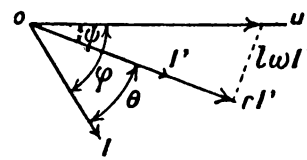


FIG. 10-26.

d'où, en vertu de la proposition déjà démontrée [1] :

$$C_{moy} = K_2 I I' \cos \theta.$$

Distinguons deux cas :

Premier cas. La réactance d'induction de la dérivation fil fin est négligeable. — Soit r la résistance de la dérivation fil fin. On a, dans ce cas :

$$I' = \frac{U}{r}$$

(1) Nous rappelons qu'il existe des wattmètres d'induction (tome II) peu employés en raison de leur imprécision.

en phase avec U (fig. 25). D'où :

$$\theta = \varphi,$$

et le couple moyen s'écrit :

$$C_{moy} = K_2 I \frac{U}{r} \cos \varphi.$$

Posons :

$$\frac{K_2}{r} = K_3.$$

Nous obtenons :

$$C_{moy} = K_3 UI \cos \varphi,$$

alors qu'en courant continu, nous avons obtenu pour expression du couple constant :

$$C = K_3 UI.$$

La déviation de l'instrument étant, en courant alternatif, provoquée par le couple *moyen* exercé sur la bobine mobile et la constante K_3 de proportionnalité étant la même en courant alternatif et en courant continu, *l'instrument étalonné en courant continu indique la valeur de l'expression* $UI \cos \varphi$, c'est-à-dire la *puissance active* de l'appareil Z.

Deuxième cas. La réactance d'induction de la dérivation fil fin n'est pas négligeable. — Soit $l\omega$ cette réactance. Le graphique des tensions et courants est, dans ce cas, celui de la figure 26. Le courant I' est, par rapport à la tension U, déphasé en arrière d'un angle ψ tel que :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{l\omega}{r}.$$

On a d'autre part :

$$rI' = U \cos \psi,$$

d'où :

$$I' = \frac{U \cos \psi}{r}$$

et :

$$\theta = \varphi - \psi.$$

D'où, en remplaçant I' et θ par leurs expressions dans la formule générale du couple moyen :

$$C_{moy} = K_2 I \frac{U \cos \psi}{r} \cos (\varphi - \psi) = K_3 UI \cos \psi \cos (\varphi - \psi).$$

Donc le wattmètre, au lieu de la puissance exacte $P = UI \cos \varphi$, indique une puissance erronée $P' = UI \cos \psi \cos (\varphi - \psi)$.

Conditions d'exactitude du wattmètre. — L'erreur commise sera d'autant plus faible que le rapport :

$$\frac{P'}{P} = \frac{\cos\psi\cos(\varphi - \psi)}{\cos\varphi} = \frac{\cos^2\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\sin\psi}{\cos\varphi}$$

$$= \cos^2\psi\,(1 + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi),$$

soit :

$$\frac{P'}{P} = \frac{1 + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi}{1 + \operatorname{tg}^2\psi}$$

sera plus voisin de 1. Deux conclusions s'en dégagent :

a) Le constructeur devra s'efforcer de donner à $\operatorname{tg}\psi = \frac{l\omega}{r}$ une valeur aussi faible que possible, autrement dit donner à la dérivation fil fin une *réactance d'induction beaucoup plus faible que sa résistance.* Il réalise cette condition avec une bobine fil fin d'un petit nombre de spires connecté en série avec une forte résistance additionnelle (fig. 23) dépourvue d'inductance. Par exemple, un bon wattmètre de précision, à la sensibilité 150 V, a une résistance totale fil fin $r = 6\,685\ \Omega$ et une inductance $l = 0{,}0085$ H, d'où $\operatorname{tg}\psi = 0{,}0004$.

b) L'exploitant saura qu'avec un appareil donné (ψ donné), les indications sont d'autant plus erronées que l'angle φ est plus grand, autrement dit que le facteur de puissance de l'installation $\cos\varphi$ est plus faible. Dès lors, dans un essai précis (réception de machines) à faible facteur de puissance (essai à vide), il corrigera la puissance lue en la multipliant par le rapport :

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2\psi}{1 + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi}.$$

Dans tous les appareils courants aux fréquences industrielles, $\operatorname{tg}\psi$ est inférieur à $\frac{1}{1\,000}$ et l'erreur est négligeable ($< 0{,}1$ %) tant que l'on a $\cos\varphi > 0{,}5$.

2° *Wattmètre à effet Hall.* — La plaquette Hall [2-2] est placée (fig. 27)

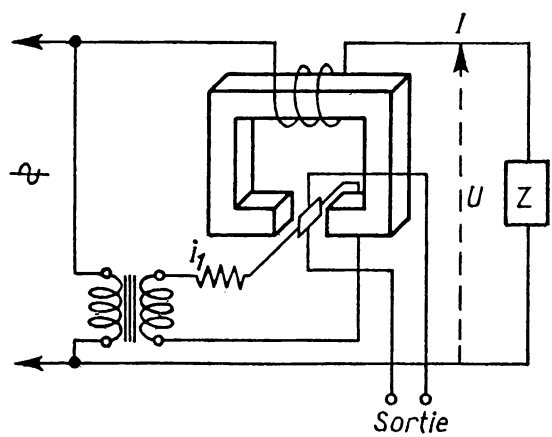
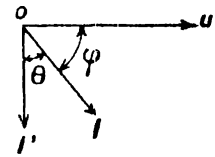


FIG. 10-27.

dans l'entrefer d'un circuit magnétique dont la bobine excitatrice est parcourue par le courant I du récepteur Z. Grâce à un transformateur T, le courant I_1 de commande est proportionnel à la tension U aux bornes de Z. Dès lors la tension de Hall engendrée entre les bornes de sortie est proportionnelle à la puissance.

19. **Mesure de la puissance réactive.** — 1° *Varmètre électrodynamique.* — La puissance réactive s'obtient aisément, à partir des indications U d'un voltmètre, I d'un ampèremètre, P d'un wattmètre par l'application des relations :



$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{UI}$$

et :

$$Q = P \operatorname{tg} \varphi.$$

Fig. 10-28.

Un wattmètre convenablement modifié (1) peut mesurer directement cette puissance. En effet, supposons que la dérivation fil fin ait une résistance négligeable devant sa réactance d'induction. On a dans ce cas $I' = U/l\omega$ déphasé de $\frac{\pi}{2}$ en retard par rapport à U. Le graphique est celui de la figure 28, et le couple moyen a pour expression :

$$C_{moy} = K_2 II' \cos \theta = K_2 I \frac{U}{l\omega} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = K_3' UI \sin \varphi,$$

en posant : $K_3' = \frac{K_2}{l\omega}$.

On peut donc réaliser un appareil électrodynamique (varmètre) donnant, par simple lecture, la puissance réactive. Nous montrerons que ce déphasage de $\frac{\pi}{2}$ du courant fil fin par rapport à la tension U est aisément obtenu dans les systèmes triphasés où la mesure de la puissance réactive s'effectue le plus couramment.

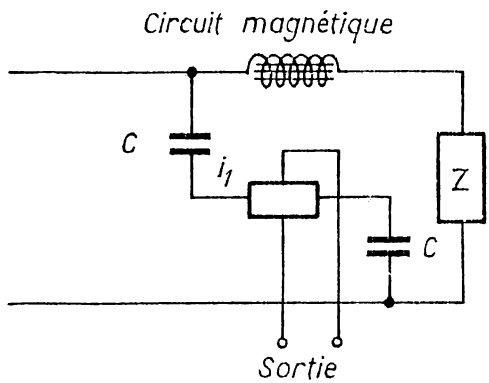


Fig. 10-29.

(1) Par exemple en entourant la bobine fil fin d'une bague en cuivre. Nous montrerons (tome 2) que cette bague a pour effet de déphaser le flux de la bobine fil fin en retard par rapport au flux de cette même bobine dépourvue de bague (spire de Frager).

2° *Varmètre à effet Hall.* — En déphasant, au moyen de condensateurs (fig. 29) le courant i_1 de commande de $\pi/2$ en avant de la tension U, la tension Hall de sortie devient proportionnelle à :

$$UI \cos (\pi/2 + \varphi) = UI \sin \varphi.$$

Le galvanomètre auquel on applique la tension de sortie est à zéro central puisque la tension de sortie peut être positive ou négative selon que la charge Z est inductive ou douée de capacité.

Puissance des courants non sinusoïdaux

20. **Effets des harmoniques de tension et de courant.** — La valeur efficace d'un courant *non sinusoïdal :*

$$i = I_0 + I_1\sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi_1) + I_3\sqrt{2} \sin (3\omega t - \varphi_3) + \ldots$$

a pour expression :

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2 + \ldots + I_n^2}$$

avec généralement $I_0 = 0$ (électrotechnique, téléphonie etc...). D'autre part un circuit dont R, L, C sont des constantes, soumis à une tension non sinusoïdale :

$$u = U_0 + U_1\sqrt{2} \sin (\omega t - \alpha_1) + U_3\sqrt{2} \sin (3\omega t - \alpha_3) + \ldots$$

offre à l'harmonique d'ordre n l'impédance :

$$Z = R_n + j(Ln\omega - 1/Cn\omega)$$

différente vis-à-vis des harmoniques supérieurs que vis-à-vis du fondamental. C'est dire que :

Une inductance atténue (par rapport à la forme sinusoïdale) *la déformation du courant. Une capacité l'accentue.*

Si le courant non sinusoïdal i est dû à la tension u la puissance moyenne ou *puissance active* a pour expression :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T ui \, dt$$

Examinons les différents termes de l'expression de p :

a) Termes U_0I_0 : valeur moyenne U_0I_0.

b) Termes $U_0I_n\sqrt{2} \sin (n\omega t - \alpha_n - \varphi_n)$ ou $I_0U_n\sqrt{2} \sin (n\omega t - \varphi_n - \alpha_n)$. Valeur moyenne nulle.

c) Termes $U_p\sqrt{2} \sin (p\omega t - \alpha_p) \times I_q\sqrt{2} \sin (q\omega t - \alpha_q - \varphi_q)$. Valeur moyenne nulle.

d) Termes $U_n\sqrt{2}\, I_n\sqrt{2} \sin (n\omega t - \alpha_n) \sin (n\omega t - \alpha_n - \varphi_n)$. Valeur moyenne : $U_nI_n \cos \varphi_n$.

Nous aurons donc :

$$P = U_0I_0 + U_1I_1 \cos \varphi_1 + U_3I_3 \cos \varphi_3 + \ldots + U_nI_n \cos \varphi_n.$$

La puissance active est la somme des puissances actives des harmoniques. — La puissance *apparente* est $S = UI$; U, I désignant les valeurs efficaces de U et de I.

Le *facteur de puissance* est $k = P/S$, mais il ne représente pas un cos φ.

La puissance *réactive* (on le démontrerait comme pour la puissance active) s'exprime par :

$$Q = \Sigma\, U_n I_n \sin \varphi_n.$$

Observation importante. — La puissance apparente S n'est pas égale à $\sqrt{P^2 + Q^2}$, sauf si la courbe de courant reproduit, à une constante près, la courbe de tension. Dans le cas général, on a :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}$$

D est appelé puissance *déformante*. Cette déformation peut provenir non seulement du fait que l'impédance présentée par le circuit aux différents harmoniques n'a pas la même valeur, mais encore du fait que R, L, C peuvent eux-mêmes dépendre de ω.

CHAPITRE 11

COURANTS POLYPHASÉS

Généralités

1. **Définition.** — Voici (fig. 1) trois bobines 1, 2, 3. Après les avoir placées devant nous de façon que, par rapport à nous, leurs sens d'enroulement soient identiques et désignées par :

face *positive*, par exemple, la face dirigée vers nous ;
face *négative* la face opposée ;
entrée l'extrémité de l'enroulement à notre gauche ;
sortie l'extrémité de l'enroulement à notre droite
(désignations arbitraires, mais les mêmes pour les 3 enroulements), montons ces 3 bobines sur un même arbre de façon telle que :

leurs faces de même nom soient à 120° $\left(\text{décalage } \frac{2\pi}{3}\right)$ entre elles ;

la bobine 2, par rotation de $\frac{2\pi}{3}$ dans le sens antihoraire vienne prendre exactement la place de la bobine 1 (face pour face) et la bobine 3, par rotation de $\frac{4\pi}{3}$ dans le sens antihoraire vienne prendre exactement la place de la bobine 1 ; puis faisons tourner l'ensemble dans un champ uniforme d'induction B à la vitesse angulaire ω dans le sens antihoraire.

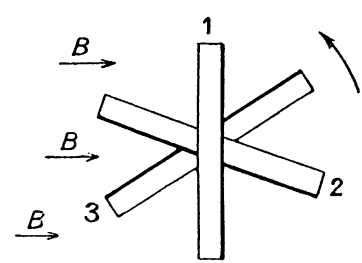


FIG. 11-1.

La figure 1 dans laquelle les faces positives des 3 bobines ont été repérées par un trait fort, fait apparaître que, dans l'ordre 1, 2, 3 et, avec un déphasage entre elles de $\frac{2\pi}{3}$, les mêmes F. É. M. sinusoïdales seront engendrées dans les 3 bobines.

Elles s'exprimeront par :

$$e_1 = E_m \sin \omega t \text{ (bobine 1)};$$

$$e_2 = E_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \text{ (bobine 2)};$$

$$e_3 = E_m \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \text{ (bobine 3)};$$

c'est-à-dire que, si à un instant t_1, la F. É. M. e_1 est maximum et dirigée, dans la bobine 1, de l'entrée vers la sortie; dans la bobine 2, la F. É. M. sera maximum et dirigée de l'entrée vers la sortie 1/3 de période plus tard, dans la bobine 3 la F. É. M. sera maximum et dirigée de l'entrée vers la sortie 2/3 de période plus tard que pour la première (fig. 2).

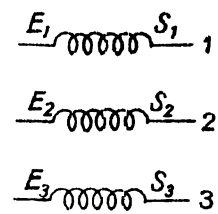


Fig. 11-2.

Relions maintenant les extrémités des 3 bobines à 6 bagues calées sur l'arbre (fig. 3) :

E_1 à la bague A	S_1 à la bague B
E_2 à la bague A'	S_2 à la bague B'
E_3 à la bague A''	S_3 à la bague B''

puis, par l'intermédiaire de balais, connectons, comme l'indique la figure 3, les bagues aux extrémités de 3 récepteurs identiques MN, $M'N'$, $M''N''$. Nous avons ainsi constitué 3 circuits indépendants qui (en désignant par φ le déphasage entre F. É. M. et courant dans chacun d'eux) sont parcourus par les courants :

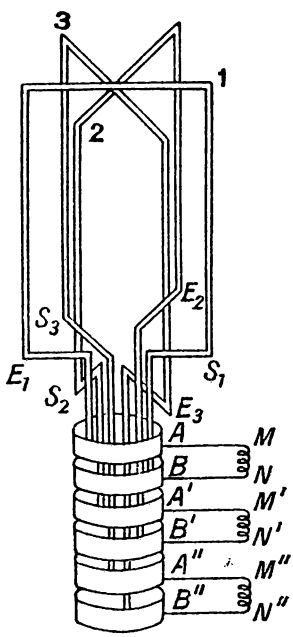


Fig. 11-3.

$$i_1 = I_m \sin(\omega t - \varphi);$$

$$i_2 = I_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right);$$

$$i_3 = I_m \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right);$$

autrement dit par 3 courants identiques régulièrement déphasés de $\frac{2\pi}{3}$ l'un par rapport à l'autre. L'ensemble de ces 3 courants constitue un système *triphasé équilibré.*

Au lieu de 3 bobines décalées de $\frac{2\pi}{3}$, nous aurions pu utiliser n bobines identiques régulièrement décalées de $\frac{2\pi}{n}$. Nous aurions réalisé un système de courants n phasés équilibré.

On appelle système polyphasé équilibré à n phases ou plus simplement système n phasé un système de n courants de

même fréquence et de même intensité efficace déphasés régulièrement les uns sur les autres de $\frac{2\pi}{n}$.

Si les courants de même fréquence n'ont pas la même amplitude ou bien ne sont pas exactement déphasés de $\frac{2\pi}{n}$ les uns par rapport aux autres, on dit que le système n phasé est *déséquilibré.*

Nous étudierons tout d'abord les systèmes polyphasés équilibrés. Des résultats que nous obtiendrons seront valables en première approximation pour les systèmes faiblement déséquilibrés tels qu'on les rencontre le plus souvent dans la réalité technique.

2. Réduction du nombre de conducteurs d'un système polyphasé équilibré. — De la définition même d'un système n phasé équilibré, il résulte qu'il comporte autant de fois 2 conducteurs qu'il y a de bobines génératrices (ou de récepteurs). Il faudra donc $2n$ conducteurs.

Mais on peut réduire le nombre de conducteurs et par suite la masse de métal nécessaire au transport d'énergie du générateur aux récepteurs, au moyen de l'un des artifices suivants :

a) Montage en étoile ou montage étoilé ;

b) Montage en polygone ou montage polygonal.

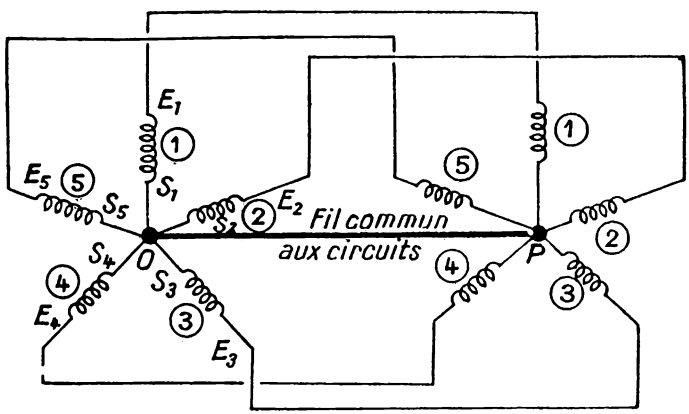


FIG. 11-4.

Montage étoilé. — Il consiste :

à connecter ensemble à un point commun O les extrémités de même nom des bobines génératrices ;

à opérer de même pour les impédances d'utilisation en P ;

à relier entre eux les points communs O et P (fig. 4) par un fil commun aux n circuits.

Le nombre de fils qui était $2n$ se réduit à $n + 1$.

C'est ce que montre la figure 4 qui se rapporte à un système pentaphasé (polyphasé à 5 phases). Le courant qui circule dans le fil commun est :

en valeur instantanée égal à la somme algébrique des courants qui circulaient dans les 5 fils que le fil commun remplace;

en représentation vectorielle, représenté, par conséquent, par le vecteur somme géométrique des vecteurs représentant les courants dans les 5 fils que le fil commun remplace.

Si le système polyphasé considéré est équilibré, ce fil commun est parcouru par un courant *nul*, car la somme géométrique de n vecteurs égaux régulièrement décalés de $\frac{2\pi}{n}$ (fig. 5) est toujours nulle (propriété géométrique). Dès lors *le fil commun peut être supprimé*. Le nombre de conducteurs est réduit à n.

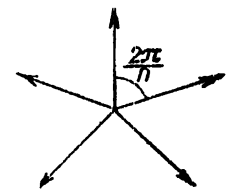


FIG. 11-5.

Montage polygonal. — Soient, mises en série, d'une part les bobines du générateur, d'autre part les bobines réceptrices. Relions les unes et les autres comme l'indique la figure 6. Il apparaît que :

chaque fil est parcouru par la somme (algébrique en valeur instantanée, géométrique en représentation vectorielle) des courants qui circulaient dans les deux fils qu'il remplace ;

il faut $n + 1$ conducteurs s'il s'agit d'un système n phasé.

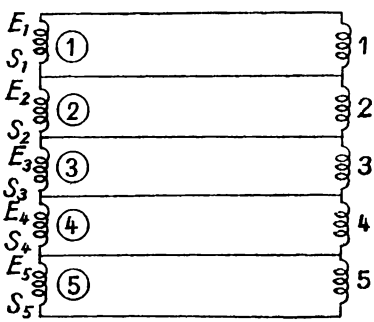


FIG. 11-6.

Mais si le système polyphasé est équilibré, on peut remplacer par un seul les conducteurs extrêmes en fermant le circuit des bobines du générateur. En effet dans ce circuit agissent n F. É. M. identiques, régulièrement déphasées de $\frac{2\pi}{n}$, dont la somme est nulle et dès lors, tant que le générateur n'est pas relié aux récepteurs, aucun courant ne circule dans ces bobines.

Les connexions entre générateur et récepteurs s'effectuent alors

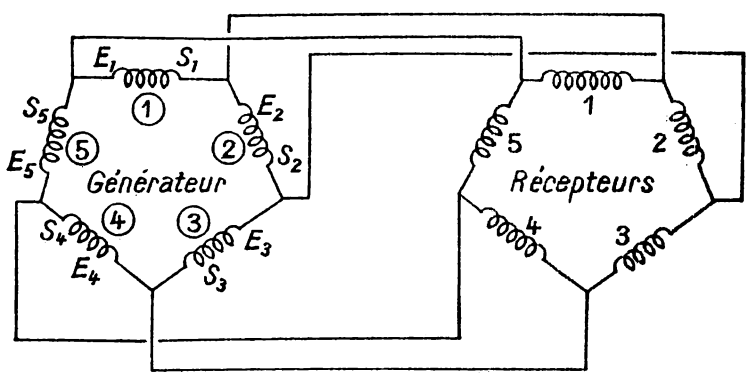


FIG. 11-7.

comme l'indique la figure 7. Comme dans le montage étoilé, *n conducteurs suffisent* si le système est n phasé. Tel est le montage polygonal.

On remarquera que l'équilibrage des bobines du générateur (bobines identiques et très régulièrement décalées de $\frac{2\pi}{n}$) doit être réalisé de façon beaucoup plus rigoureuse dans le montage polygonal que dans le montage étoilé, car, s'il n'en était pas ainsi, la F. É. M. résultante dans le circuit fermé des bobines du générateur engendrerait un courant inutile, même sans liaison du générateur avec des récepteurs.

En définitive, soit en montage étoilé, soit en montage polygonal, tout transport d'énergie par système polyphasé à n phases peut s'effectuer au moyen de n conducteurs parcourus par des courants régulièrement déphasés entre eux de $\frac{2\pi}{n}$.

SYSTÈMES POLYPHASÉS INDUSTRIELS

Les systèmes polyphasés pratiquement utilisés sont :
le système triphasé $n = 3$;
le système tétraphasé $n = 4$;
le système hexaphasé $n = 6$.
On emploie également sous le nom de système *diphasé* un système qui ne répond pas à la définition du système polyphasé.

3. **Système triphasé.** — Le montage étoilé est désigné sous le nom de *montage en étoile* (fig. 8), le montage en polygone sous le nom de

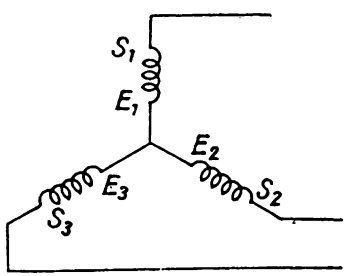


FIG. 11-8.

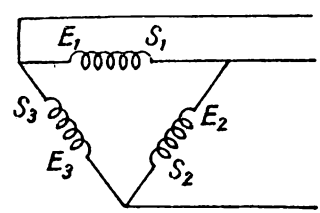


FIG. 11-9.

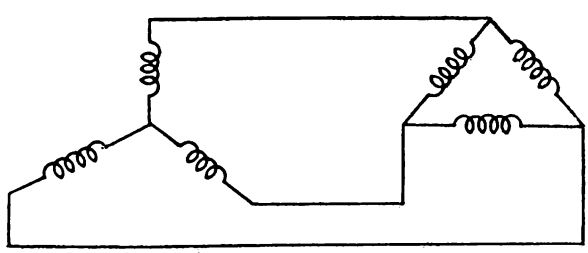


FIG. 11-10.

montage en triangle (fig. 9). On doit remarquer que le montage des récepteurs est indépendant du montage des bobines du générateur.

On peut associer un générateur en étoile et des récepteurs en triangle (fig. 10) et réciproquement.

On désigne sous le nom de grandeurs (tension, intensité) ***simples*** les grandeurs qui se rapportent à chacune des bobines du générateur ou à chacun des récepteurs et l'on appelle grandeurs *composées* celles qui se rapportent aux fils conducteurs extérieurs.

Dans ce qui suit, nous désignerons, en valeurs efficaces, par :

V^1, V^2, V^3, les tensions simples ou d'enroulements ;

U^1, U^2, U^3, les tensions composées (mesurables à l'extérieur du système entre fils de lignes) ;

J_1, J_2, J_3, les courants simples ou courants de phases ;

I_1, I_2, I_3, les courants composés ou courants de lignes.

MONTAGE ÉTOILÉ. RELATIONS ENTRE LES GRANDEURS SIMPLES ET COMPOSÉES. — On a évidemment (fig. 11) :

$$I_1 = J_1 \qquad I_2 = J_2 \qquad I_3 = J_3 ;$$

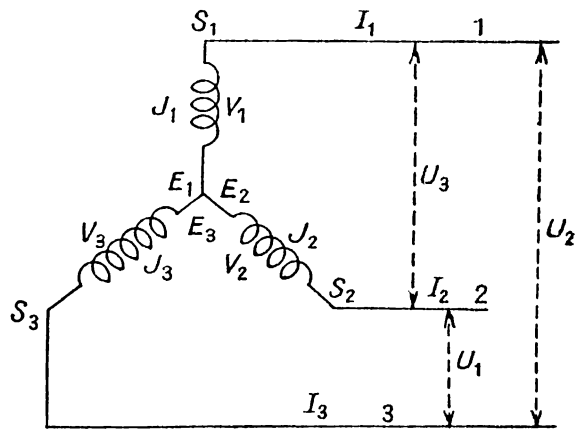


FIG. 11-11.

les courants de ligne sont égaux aux courants de phases et en phase avec eux.

D'autre part, on peut écrire :

$$\vec{U}_3 = \vec{V}_{S1} - \vec{V}_{S2}$$
$$= (\vec{V}_{S1} - \vec{V}_{E1}) + (\vec{V}_{E1} - \vec{V}_{S2})$$
$$= (\vec{V}_{S1} - \vec{V}_{E1}) - (\vec{V}_{S2} - \vec{V}_{E2}) = \vec{V}_1 - \vec{V}_2.$$

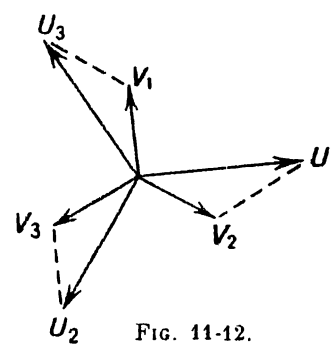


FIG. 11-12.

On obtiendrait de même :

$$\vec{U}_1 = \vec{V}_2 - \vec{V}_3,$$
$$\vec{U}_2 = \vec{V}_3 - \vec{V}_1.$$

En traduisant vectoriellement les relations précédentes, on obtient

le graphique (fig. 12). Les vecteurs tels que U_1 et V_2 font entre eux l'angle $\frac{\pi}{6}$ et l'on a immédiatement :

$$U_1 = 2V_1 \cos\frac{\pi}{6} = 2V_1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}V_1;$$

les tensions composées sont égales à $\sqrt{3}$ *fois les tensions simples et sont déphasées de* $\frac{\pi}{6}$ par rapport *aux tensions simples.*

MONTAGE TRIANGLE. RELATION ENTRE LES GRANDEURS SIMPLES ET COMPOSÉES. — On a évidemment (fig. 13) :

$$U_1 = V_1 \qquad U_2 = V_2 \qquad U_3 = V_3;$$

les tensions composées sont égales aux tensions simples et en phase avec elles.

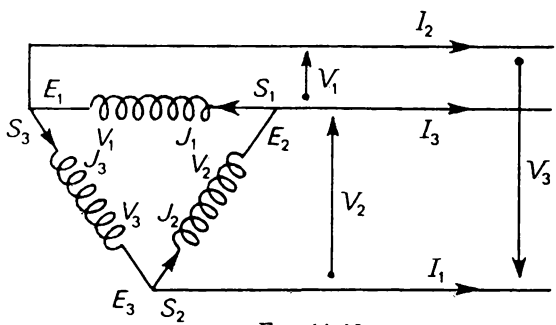


FIG. 11-13.

Pour obtenir la relation entre les courants de phases et les courants de lignes, il suffit de rétablir le système triphasé à 6 conducteurs et de remarquer que :

en soudant deux fils de bout en bout (remplaçant ces deux fils par un conducteur unique), le conducteur unique est parcouru par un courant qui est la somme des courants dans les deux fils préexistants ;

pour faire la somme de ces courants, il faut prendre garde à leurs sens relatifs et pour cela, en considérant un courant qui, dans une bobine, circule par exemple, de la borne S à la borne E, affecter :

du signe + un courant qui, dans un conducteur extérieur, circule dans le sens SE ;

du signe — un courant qui, dans un conducteur extérieur, circule dans le sens opposé.

La figure 14 montre que l'on doit écrire en grandeurs vectorielles :

$$\vec{I}_2 = \vec{J}_1 - \vec{J}_3,$$
$$\vec{I}_3 = \vec{J}_2 - \vec{J}_1,$$
$$\vec{I}_1 = \vec{J}_3 - \vec{J}_2,$$

relations qui sont traduites par le graphique de la figure 15. Il montre immédiatement que l'on a :

$$I_2 = 2J_1 \cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\,J_1;$$

les courants de lignes sont égaux à $\sqrt{3}$ *fois les courants de phases et déphasés de* $\frac{\pi}{6}$ *par rapport à ceux-ci.*

REMARQUE I. — On appelle tension *étoilée* la tension entre les fils de ligne et le point neutre réel (étoile) ou fictif (triangle).

Dans le montage en étoile :

tension simple (tension d'enroulement) = tension étoilée.

Dans le montage en triangle :

tension simple (tension d'enroulement) = $\sqrt{3}$ × tension étoilée.

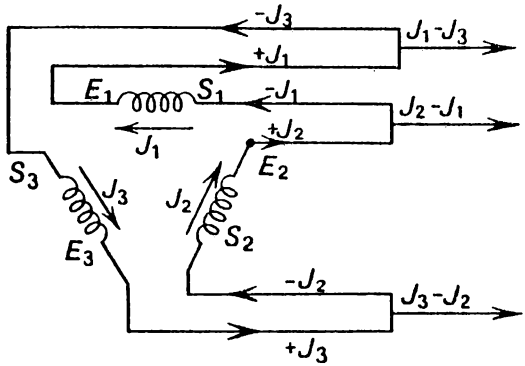


FIG. 11-14.

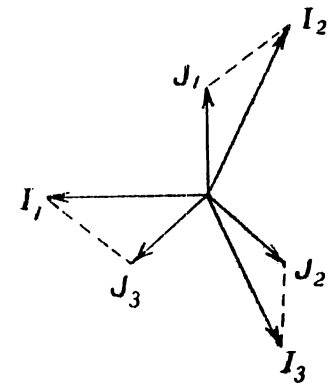


FIG. 11-15.

REMARQUE II. — Dans le montage en étoile déséquilibré avec un fil commun :

le fil commun est appelé *fil neutre* ;

les tensions simples sont parfois appelées *entre phases et neutre* ;

le fil neutre est parcouru par un courant :

$$\vec{I}_0 = -\vec{J}_1 - \vec{J}_2 - \vec{J}_3,$$

d'après la loi des nœuds.

REMARQUE III. — La figure 16 résume les conclusions précédentes. Elle montre en outre que, dans un système équilibré, si l'on porte les tensions composées suivant les côtés d'un triangle équilatéral, les portions de bissectrices de ce triangle comprises entre le centre de gravité et les sommets représentent les tensions étoilées.

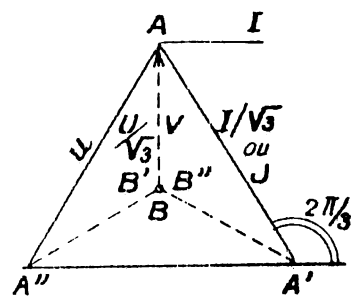


FIG. 11-16.

Ce mode de représentation dans lequel les vecteurs « tension composée » sont portés en grandeur et en phase, mais chacun d'eux avec une origine différente, est très commode quand il s'agit de résoudre des problèmes relatifs aux systèmes triphasés déséquilibrés. On remarquera que les déphasages entre les tensions composées sont représentées par les angles *extérieurs* à ce triangle.

4. Pourquoi les réseaux de distribution comportent un fil neutre. — Tous les réseaux de distribution comportent de l'éclairage. Envisageons deux cas.

Premier cas. Il n'y a pas de fil neutre. — On sait que la tension des lampes fabriquées en grande série s'unifie aux alentours de 220 V. Si nous la désignons sous le nom de tension *unifiée* U_e, nous devrons nous placer dans deux hypothèses.

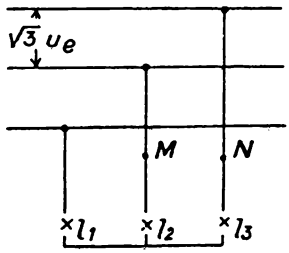


Fig. 11-17.

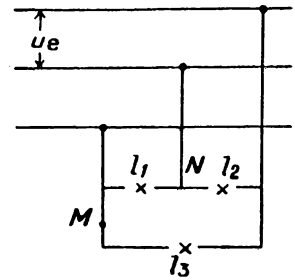


Fig. 11-18.

a) *La tension entre fils est égale à* $\sqrt{3}\ U_e$ soit $220\sqrt{3} = 380$ V environ. Les lampes devront donc être montées *en étoile* par groupes identiques l_1, l_2, l_3 entre fils de phases et un point neutre artificiel (fig. 17).

On voit que si le groupe de lampes l_3 est éteint (rupture en N), les deux autres groupes sont en série sous 380 V, c'est-à-dire qu'ils fonctionnent sous 190 V au lieu de 220 V : leur intensité lumineuse est réduite. Si en outre on coupe le circuit en M, pour éteindre le groupe l_2, le groupe l_1 s'éteint aussi puisqu'il n'a pas de fil de retour.

Par ailleurs, si les groupes de lampes l_1, l_2, l_3 ne sont pas identiques, le point neutre O du système ne se trouve pas au centre de gravité du triangle équilatéral dont les côtés représentent les tensions composées (car les chutes de tension ne sont pas les mêmes dans les trois groupes). Les circuits *les plus chargés* (nombreuses lampes, faible résistance équivalente) sont *sous-voltés*, les circuits *les moins chargés* sont *survoltés* (fig. 20).

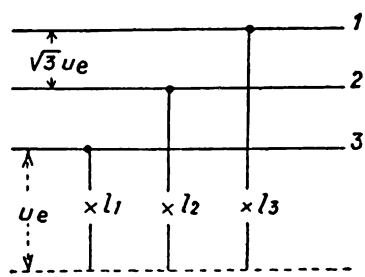


Fig. 11-19.

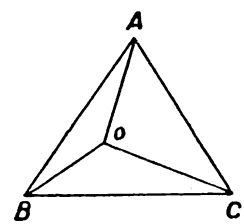


Fig. 11-20.

En définitive, le système de distribution sans fil neutre *ne convient pas* si les tensions entre fils sont telles que l'usager est contraint, pour utiliser des lampes de modèle courant, de monter celles-ci, par groupes identiques, en étoile.

b) *La tension entre fils est égale à* U_e. — Dans ce cas, l'usager monte ses lampes entre fils, c'est-à-dire *en triangle*. La figure 18 montre que, chaque groupe de lampes étant toujours sous la tension entre fils et ayant son conducteur de retour, est indifférent aux ruptures qui peuvent se produire sur les circuits des autres groupes.

L'inconvénient du montage étoilé n'existe pas : les groupes de lampes sont indépendants les uns des autres quant à leur fonctionnement. Seule une faible différence de tension entre fils — à cause de l'inégalité des chutes de tension sur les trois fils de ligne — peut résulter d'un déséquilibrage entre les récepteurs montés sur les trois ponts.

Deuxième cas. Le réseau comporte un fil neutre. — Dans ce cas, le distributeur maintient le point neutre O (fig. 19) de l'alternateur (ou du transformateur de distribution) au même potentiel par rapport aux extrémités A, B, C des enroulements. Il y a équilibre des tensions simples au départ. Chez l'exploitant, le déséquilibre dans

les tensions entre phases et neutre ne pourra résulter que des inégalités dans les chutes de tension et sera toujours assez faible.

On voit que le fonctionnement de chaque groupe de lampes, soit en cas de rupture sur les autres circuits, soit dans le cas d'inégalités de charges, est indépendant de celui des autres groupes. Le montage en étoile de lampes entre phases et neutre convient donc parfaitement. Il est même plus avantageux que le montage en triangle (entre fils de phases). C'est parce que :

a) A puissance égale et bien qu'il soit nécessaire d'avoir 4 fils au lieu de 3, la masse de métal est moindre qu'en triangle. Cela résulte du fait que le fil neutre, traversé par un courant assez faible (puisqu'il résulte uniquement du déséquilibrage) peut n'avoir qu'une faible section [1] et surtout du fait que la même puissance est transportée sous une tension $\sqrt{3}$ fois plus grande, donc avec un courant $\sqrt{3}$ fois plus faible [2].

b) On dispose de deux tensions, la plus élevée (380 V) convenant bien à la force motrice [3] et la plus faible (220 V) mieux adaptée à l'éclairage [4].

5. **Système tétraphasé.** — Le générateur considéré [11-1] possède 4 bobines identiques décalées de $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ l'une par rapport à l'autre. Elles engendrent des F. É. M. :

$$e_1 = E_m \sin \omega t \qquad \text{(bobine 1)} ;$$

$$e_2 = E_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{(bobine 2)} ;$$

$$e_3 = E_m \sin (\omega t - \pi) \qquad \text{(bobine 3)} ;$$

$$e_4 = E_m \sin \left(\omega t - \frac{3\pi}{2}\right) \qquad \text{(bobine 4)}.$$

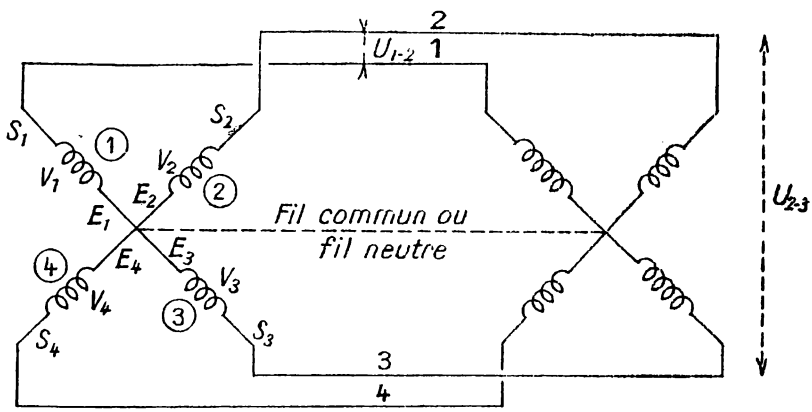


FIG. 11-21.

Connectons comme déjà indiqué ces bobines à des récepteurs, puis réalisons :

1° LE SYSTÈME ÉTOILÉ (fig. 21). — Avec fil commun, ce qui ramène

[1] On lui donne généralement une section égale à la moitié de celle des fils de phase.

[2] Nous montrerons (tome II) qu'en raison des pertes par effet Joule dans les lignes, le poids de métal de celles-ci, à puissance égale transportée, est inversement proportionnel au carré de la tension.

[3] Un moteur à 380 V, même de faible puissance, est, à puissance égale, moins cher qu'un moteur à 220 V.

[4] Une lampe de 380 V consomme, à égalité de flux lumineux, plus de puissance qu'une lampe de 220 V et coûte plus cher.

de 8 à 5 le nombre de conducteurs nécessaires. Ce nombre se réduit à 4 par suppression du fil commun (système équilibré).

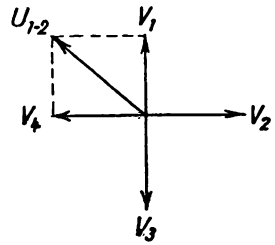


FIG. 11-22.

On obtient 3 tensions différentes :

la *tension entre phases et neutre* :

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V \text{ (système équilibré) ;}$$

la *tension entre fils de phase consécutifs* :

$$\overrightarrow{U_{1-2}} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \text{ (fig. 22),}$$

soit :

$$U_{1-2} = \sqrt{2}\, V,$$

la tension entre fils de phase consécutifs est égale à $\sqrt{2}$ fois la tension simple (entre phases et neutre) ;

la tension entre fils de phase opposés :

$$\overrightarrow{U_{1-3}} = \vec{V}_1 - \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + (-\vec{V}_3) = \overrightarrow{2V_1} \text{ (fig. 22),}$$

la tension entre fils de phase opposés est égale à 2 fois la tension entre phases et neutre.

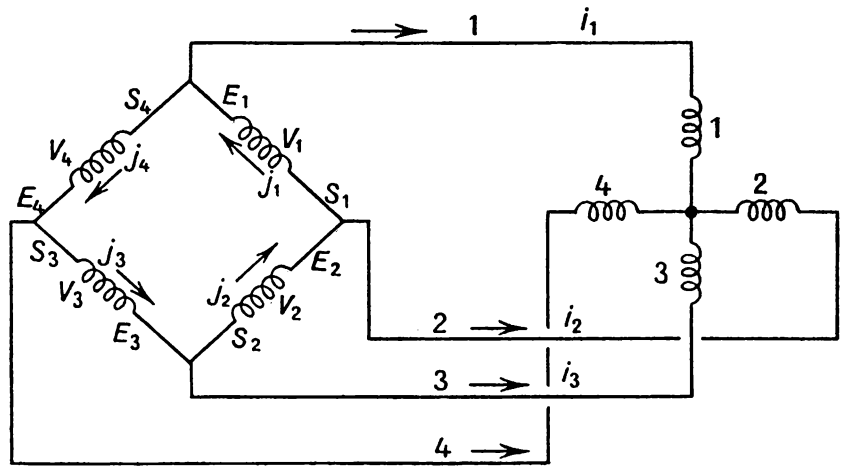


FIG. 11-23.

Les courants de phases sont évidemment égaux aux courants de ligne (système équilibré 4 fils).

2° LE SYSTÈME POLYGONAL (fig. 23) qui conduit à deux tensions différentes :

tension entre fils consécutifs égale à la tension simple :

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V ;$$

tension entre fils opposés (tels que 1 et 3) :

$$\overrightarrow{U_{1-3}} = \vec{V}_{E_1} - \vec{V}_{S_2} = \vec{V}_{E_1} - \vec{V}_{S_1} + \vec{V}_{E_2} - \vec{V}_{S_2} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2,$$

et le graphe (fig. 24) donne :

$$U_{1-3} = \sqrt{2}\, V.$$

Quant au *courant par fil* (courant de ligne), on a :

$$\vec{I}_1 = \vec{J}_1 - \vec{J}_4 \qquad \text{(fig. 25)}$$

d'où :

$$I = \sqrt{2}\, J,$$

le courant par fil est égal à $\sqrt{2}$ fois le courant simple.

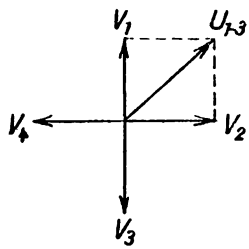


Fig. 11-24.

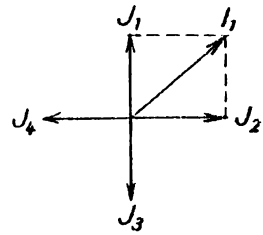


Fig. 11-25.

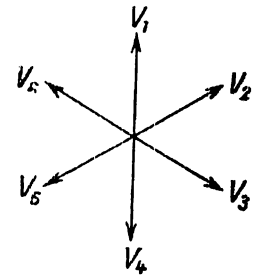


Fig. 11-26.

6. **Système hexaphasé.** — Nous aurons dans ce cas 6 tensions simples représentées (système équilibré) par le graphe (fig. 26).

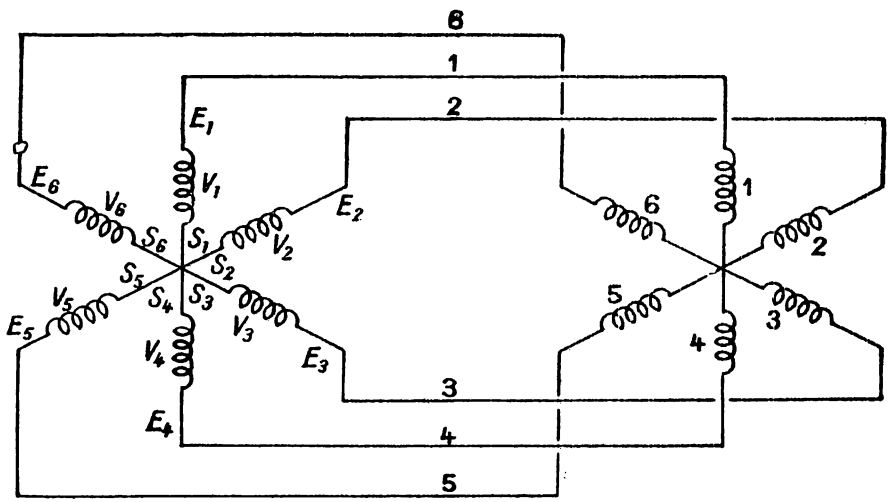


Fig. 11-27.

Montage étoilé (fig. 27). — Il permet de disposer de tensions de 3 valeurs différentes :

12 tensions entre phases et neutre ou bien entre phases consécutives. — On a en effet (fig. 26) :

$$\overrightarrow{U_{1-2}} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2,$$

le graphe montre que $U_{1-2} = V_1 = V$ (se confond avec V_6);

6 tensions entre fils de phase de même parité :

$\overrightarrow{U_{1-3}} = \vec{V}_1 - \vec{V}_3$; $\sqrt{3}\ V_1 = \sqrt{3}\ V = U_{13}$ (fig. 28)

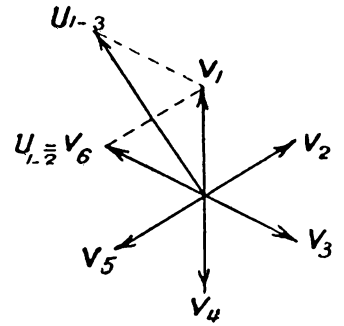


FIG. 11-28.

3 tensions entre fils de phase non consécutifs et de parités contraires (fig. 30) :

$\overrightarrow{U_{1-4}} = \vec{V}_1 - \vec{V}_4 = \vec{V}_1 + (-\vec{V}_4)$; $2V_1 = 2V = U_{14}$

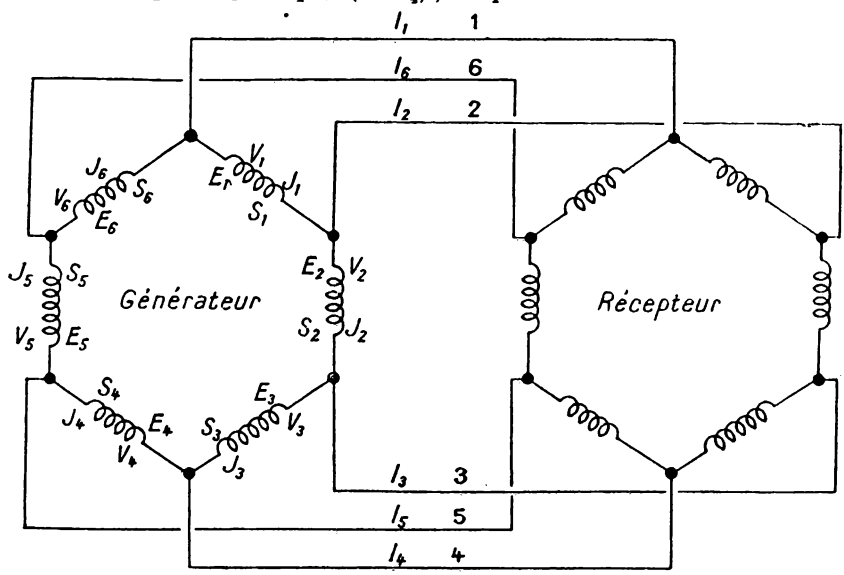


FIG. 11-29.

MONTAGE POLYGONAL (fig. 29). — Entre les conducteurs extérieurs, on peut relever :

6 tensions égales à V entre fils consécutifs ;

6 tensions egales à $\sqrt{3}$ V entre fils de même parité. On a en effet :

$\overrightarrow{U_{1-3}} = \overrightarrow{V_{E1}} - \overrightarrow{V_{S2}} = \vec{V}_{E1} - \vec{V}_{S1} + \vec{V}_{E2} - \vec{V}_{S2} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ (fig. 30) ;

3 tensions 2V entre

$$\overrightarrow{U_{1-4}} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \overrightarrow{2V_2} \qquad \text{(fig. 30)}$$

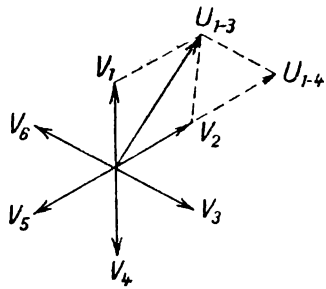


FIG. 11-30.

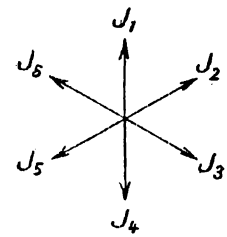


FIG. 11-31.

Les courants de lignes sont égaux aux courants de phases. **En effet :**

$$\vec{I}_1 = \vec{J}_1 - \vec{J}_6 = \overrightarrow{J_2} \qquad \text{(fig. 31)}$$

7. **Système diphasé.** — C'est un système de deux courants de même amplitude et de même fréquence dont l'un est déphasé de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à l'autre.

Ce n'est pas un système polyphasé conforme à la définition, car un tel système exigerait un déphasage $\frac{2\pi}{2} = \pi$ entre les deux courants.

On obtient par exemple un tel système au moyen de 2 bobines rectangulaires tournant d'un mouvement uniforme autour de leur axe commun (fig. 32) dans un champ d'induction uniforme.

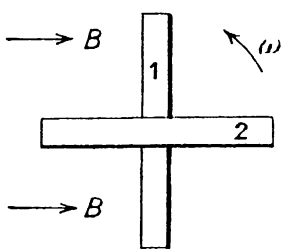


FIG. 11-32.

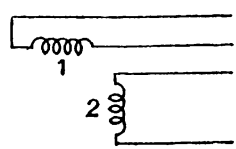


FIG. 11-33.

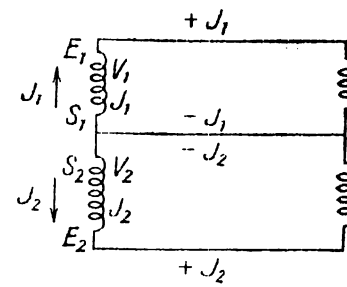


FIG. 11-34.

Normalement, un système diphasé comporte 4 conducteurs et pour marquer le décalage de $\frac{\pi}{2}$ entre les bobines génératrices, on le représente comme l'indique la figure 33. Il faut remarquer que :

1° Dans le montage étoilé (fig. 34), le fil commun ne peut pas être supprimé, même en système équilibré. En effet, le courant dans le

fil commun est la somme de deux courants en quadrature (fig. 35) :

$$\vec{I} = -\vec{J}_1 - \vec{J}_2 \; ; \; \sqrt{2}J_1 = \sqrt{2}J_2 = I$$

le courant dans le fil commun est $\sqrt{2}$ fois plus grand que dans les deux autres.

2° Le montage polygonal (fig. 36) se confond avec le montage étoilé car le nombre de conducteurs ne peut pas être ramené à deux.

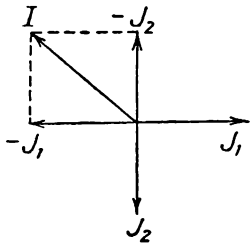


Fig. 11-35.

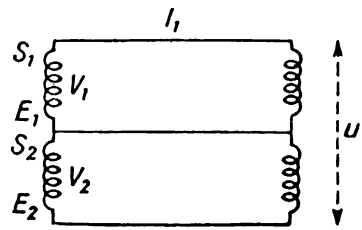


Fig. 11-36.

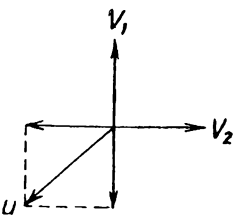


Fig. 11-37.

En effet, la tension entre fils extrêmes est (fig. 37) :

$$\vec{U} = \vec{V}_{S1} - \vec{V}_{E2} = \vec{V}_{S1} - \vec{V}_{E1} + \vec{V}_{S2} - \vec{V}_{E2} = -\vec{V}_1 - \vec{V}_2$$

La tension entre fils extrêmes est $\sqrt{2}$ fois la tension simple. — Comme elle n'est pas nulle, le montage polygonal est impossible. C'est seulement un montage série. Il ne diffère du montage étoilé que par le nom

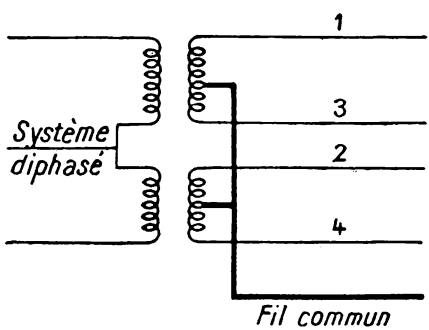


Fig. 11-38.

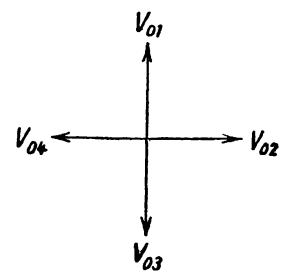


Fig. 11-39.

des extrémités des bobines formant point commun (une entrée et une sortie au lieu de deux entrées).

Remarque I. — Dans le transport d'énergie par système diphasé, le fil commun parcouru par un plus fort courant que les fils extrêmes est plus gros que les autres.

Remarque II. — On peut aisément transformer un système diphasé en tétraphasé et réciproquement à l'aide de deux transformateurs identiques. On les monte comme l'indique la figure 38. En effet, les tensions

V_{0-1} et V_{0-3} sont opposées l'une à l'autre ; il en est de même des tensions V_{0-2} et V_{0-4}. Comme les tensions V_{0-1} et V_{0-2} sont déphasées de $\frac{\pi}{2}$, le graphique des tensions est celui de la figure 39. On dispose donc du secondaire du transformateur d'un système tétraphasé avec fil commun.

Expression de la puissance des systèmes polyphasés

8. **Expression générale de la puissance active d'un système *n* phasé.** — Un système *n* phasé étant constitué par *n* circuits alternatifs simples, la puissance fournie extérieurement par l'alternateur sera la somme des puissances fournies à ces *n* circuits.

a) Si le système n'est *pas équilibré*, on écrira donc :

$$P = V_1 J_1 \cos \varphi_1 + V_2 J_2 \cos \varphi_2 + V_3 J_3 \cos \varphi_3 + \ldots.$$

V, J désignant les tensions et les courants de chacun des circuits simples et φ le déphasage entre ces grandeurs.

b) Si le système *n* phasé *est équilibré*, on aura :

$$P = nVJ \cos \varphi.$$

Pour chacun des systèmes polyphasés équilibrés pratiquement utilisés, on donne à cette expression générale une forme plus commode en faisant intervenir les grandeurs (tension et courant) qui intéressent l'exploitant.

9. **Puissance active en système triphasé équilibré.** — Elle s'exprime par la formule :

$$P = 3VJ \cos \varphi.$$

Montage en étoile. — Le courant dans chacun des 3 circuits indépendants est devenu le courant composé (par fil extérieur)

On a donc :

$$P = 3VI \cos \varphi.$$

Il est plus commode d'exprimer la puissance en fonction des grandeurs composées (celles qui intéressent l'exploitant). Nous avons montré qu'en triphasé étoilé on a :

$$V = \frac{U}{\sqrt{3}} \qquad U = \text{tension composée (entre fils extérieurs).}$$

D'où :

$$P = 3 \frac{U}{\sqrt{3}} I \cos \varphi = \sqrt{3}\, UI \cos \varphi.$$

Montage en triangle (fig. 13). — La tension U composée (entre fils) n'est autre que la tension simple V. Le courant dans chacun des trois circuits indépendants est le courant de phase J. Nous avons établi qu'en triphasé triangle, on a :

$$J = \frac{I}{\sqrt{3}}.$$

On a donc :

$$P = 3VJ\cos\varphi = 3U\frac{I}{\sqrt{3}}\cos\varphi = \sqrt{3}\,UI\cos\varphi.$$

Quel que soit le montage, la puissance active d'un système triphasé équilibré a pour expression :

$$\boxed{P = \sqrt{3}\,UI\cos\varphi}$$

U = tension composée (entre fils) ;
I = courant de ligne ;
φ = déphasage *non pas entre U et I* mais entre les grandeurs *simples* V et J ; si le système n'est pas parfaitement équilibré, cette expression donne une valeur suffisamment approchée dans la pratique.

10. **Puissance active en système tétraphasé équilibré** (fig. 21). — La formule générale de la puissance polyphasée s'écrit :

$$P = 4VJ\cos\varphi \qquad (\varphi = \text{déphasage dans chaque phase}),$$

soit en étoile :

$$P = 2\sqrt{2}\,U_{1-2}\,I\cos\varphi \quad \text{ou} \quad P = 2U_{1-3}\,I\cos\varphi$$

et en polygone :

$$P = 2\sqrt{2}\,U_{1-2}I\cos\varphi \quad \text{ou} \quad P = 2U_{1-3}I\cos\varphi,$$

de telle sorte que, quel que soit le montage, si on désigne par :

U_g la plus grande tension entre 2 bornes de sortie de l'alternateur (neutre excepté) ;

U_p la plus petite tension entre 2 bornes de sortie de l'alternateur (neutre excepté), on a :

$$\boxed{P = 2\sqrt{2}\,U_pI\cos\varphi} \quad \text{ou} \quad \boxed{P = 2U_gI\cos\varphi}$$

(φ = déphasage entre grandeurs simples).

11. **Puissance active d'un système hexaphasé équilibré (fig. 27) :**

$$P = 6VJ\cos\varphi,$$

expression qu'on peut aussi bien écrire :

en étoile :

$P = 6U_{1-2}I\cos\varphi$ ou $P = 2\sqrt{3}\,U_{1-3}I\cos\varphi$ ou $P = 3U_{1-4}I\cos\varphi$:

en polygone :

$$P = 2\sqrt{3}\,U_{1-3}I\cos\varphi \quad \text{ou} \quad P = 3U_{1-4}I\cos\varphi,$$

de telle sorte que, quel que soit le montage, si on désigne par :

$U_p = V = U_{1-2}$ la plus petite tension entre 2 bornes de l'alternateur (neutre excepté) ;

$U_m = U_{1-3}$ la moyenne tension entre 2 bornes de l'alternateur (neutre excepté) ;

$U_g = U_{1-4}$ la plus grande tension entre 2 bornes de l'alternateur (neutre excepté), on a dans tous les cas :

$$\boxed{P = 6U_pI\cos\varphi} \quad \text{ou} \quad \boxed{P = 2\sqrt{3}\,U_mI\cos\varphi} \quad \text{ou} \quad \boxed{P = 3U_gI\cos\varphi}$$

12. **Puissance active d'un système diphasé équilibré (fig. 34) :**

$$P = 2VJ\cos\varphi,$$

expression qui, dans le système à 3 fils, devient :

$$\boxed{P = 2U_pJ\cos\varphi} \quad \text{ou} \quad \boxed{P = \sqrt{2}\,U_gJ\cos\varphi}$$

U_p et U_g désignant respectivement la plus petite et la plus grande tension mesurée entre bornes de l'alternateur et φ le déphasage entre grandeurs simples.

13. **Puissance réactive d'un système polyphasé.** — Elle s'exprime évidemment :

a) *En déséquilibré* par

$$Q = V_1J_1\sin\varphi_1 + V_2J_2\sin\varphi_2 + \ldots$$

b) En *équilibré* (*n* phases) par :

$$Q = nVJ\sin\varphi.$$

Il suffit donc, pour avoir les expressions des puissances réactives dans les différents systèmes industriels équilibrés, de remplacer *cos* par *sin* dans toutes les formules des paragraphes précédents.

MESURE DE LA PUISSANCE DES SYSTÈMES POLYPHASÉS

I. — Mesure de la puissance active

Il importe de rappeler préalablement qu'un wattmètre indique :
la valeur moyenne du produit des valeurs instantanées du courant dans le gros fil et de la tension appliquée au fil fin ;

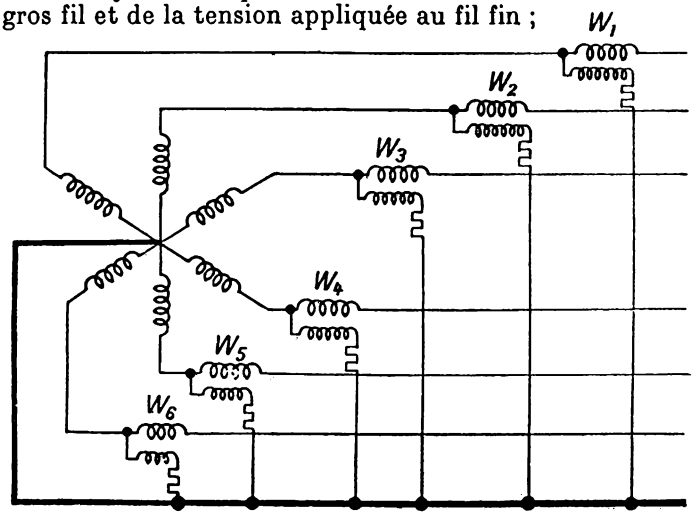


Fig. 11-40.

ou bien : le produit du courant efficace dans le gros fil par la tension efficace appliquée au fil fin et par le cosinus du déphasage entre cette tension et ce courant.

14. Mesure de la puissance active d'un système polyphasé étoilé avec fil neutre. — La puissance active à mesurer est la somme des valeurs moyennes des puissances instantanées des n circuits alternatifs simples. Le fil commun remplaçant tous les fils de retour de ces n circuits, un wattmètre dont le gros fil est mis en série avec un fil de phase et dont le fil fin est branché entre ce fil de phase et le fil commun indique la puissance du circuit alternatif simple correspondant à cette phase.

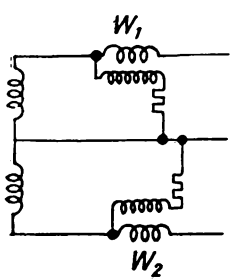


Fig. 11-41.

Dès lors, la puissance active du système n phasé sera la somme des indications de n wattmètres connectés comme l'indique la figure 40 pour un système hexaphasé.

Si le système est équilibré, il suffit de brancher un seul wattmètre et si W désigne son indication, on a $P = nW$.

En diphasé, le montage est celui de la figure 41.

15. Mesure de la puissance active d'un système triphasé sans fil neutre.

1° *Système équilibré. Un wattmètre.* — Il suffit de constituer un point neutre P (c'est-à-dire un point qui est au même potentiel que le point commun O). Pour cela (fig. 42), on interpose entre ce point neutre P et les fils de ligne trois impédances identiques (l'une d'elles est l'ensemble fil fin du wattmètre) comme le montre la figure 42 se rapportant à un système triphasé. On est ramené au cas précédent. On a donc $P = nW$.

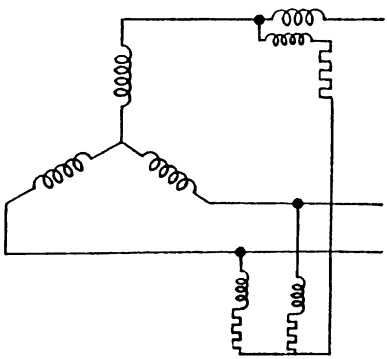


FIG. 11-42.

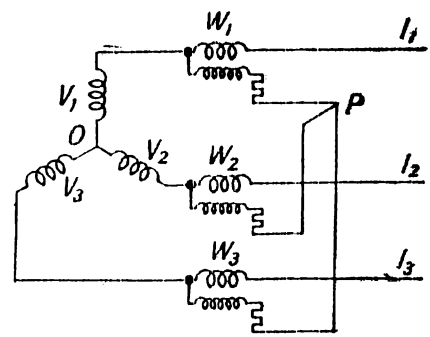


FIG. 11-43.

2° *Système déséquilibré avec n wattmètres.* — On branche (fig. 43) un wattmètre sur chacun des fils, leurs fils fins aboutissant à un même point P quelconque (c'est-à-dire tel que les impédances entre P et les 3 fils peuvent être inégales).

En effet, prenons comme zéro des potentiels, le potentiel du centre O de l'étoile (fig. 43) et désignons par V_1, V_2, V_3 les potentiels des fils de ligne. Soit V le potentiel du point P. On a :

W_1 = valeur moyenne de $(v_1 - v)i_1$
W_2 = valeur moyenne de $(v_2 - v)i_2$, etc...

et la puissance active est :

$$W_1 + W_2 + \ldots = \text{moyenne de } [(v_1 - v)i_1 + (v_2 - v)i_2 + (v_3 - v)i_3 + \ldots].$$

Or on a :

$$-v(i_1 + i_2 + i_3 + \ldots) \equiv 0,$$

car il n'y a pas de fil neutre et la somme des courants $i_1 + i_2 + i_3 + \ldots$ est nulle, sinon il y aurait accumulation constante d'électricité soit à l'alternateur, soit à l'utilisation. On a donc :

$$W_1 + W_2 + \ldots = \text{moyenne de } v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + \ldots = P,$$

d'où :

$$P = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots.$$

3° *Système déséquilibré avec n — 1 wattmètres.* — Le potentiel du point P étant quelconque (puisqu'il s'élimine dans les calculs), il est permis de

prendre ce point sur l'un des fils de phase. A ce moment, le wattmètre correspondant à cette phase (W_3 sur la figure 44) ne dévie pas, puisque sa bobine fil fin est sous une tension nulle. On peut le supprimer. Il ne subsiste que $n - 1$ wattmètres. La figure 45 donne le montage en hexaphasé.

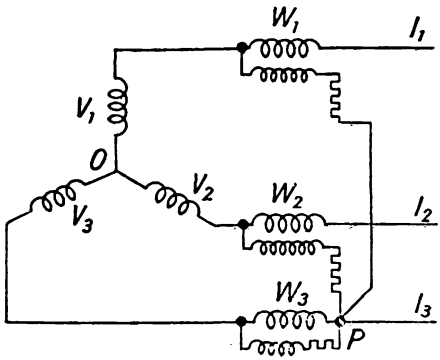


FIG. 11-44.

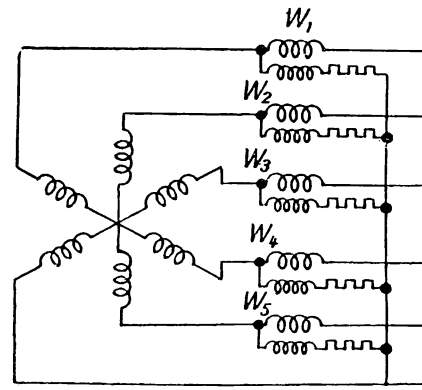


FIG. 11-45.

REMARQUE. — Rien ne distingue, sur les fils de ligne, un système polygonal d'un système étoilé sans fil neutre. C'est pourquoi la méthode précédente est aussi bien applicable au système polygonal.

16. **Méthode des deux wattmètres (puissance active triphasée déséquilibrée).** — Nous nous proposons d'insister particulièrement sur la méthode précédente appliquée à un *système triphasé à trois fils.* Elle est d'application courante. On l'appelle : *méthode des deux wattmètres.*

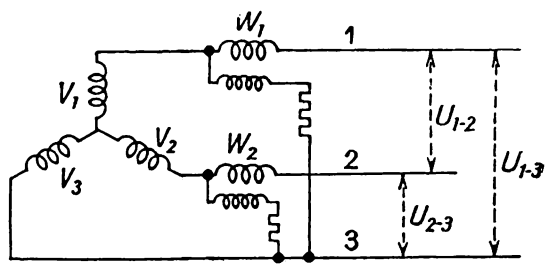


FIG. 11-46.

Nous avons montré qu'elle s'applique à un système polyphasé même déséquilibré. Cherchons, dans l'hypothèse du système équilibré à quoi correspondent les indications des deux wattmètres. La figure 46 en donne le montage. On a :

$$W_1 = U_{1-3} I_1 \cos(\overrightarrow{U_{1-3}}, \overrightarrow{I_1})$$
$$W_2 = U_{2-3} I_2 \cos(\overrightarrow{U_{2-3}}, \overrightarrow{I_2}),$$

avec :

$$\overrightarrow{U_{1-3}} = \vec{V}_1 - \vec{V}_3 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{U_{2-3}} = \vec{V}_2 - \vec{V}_3.$$

Comme φ désigne toujours le déphasage entre les grandeurs simples, le graphique (fig. 47) montre que l'on a :

$$W_1 = UI\cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) \qquad \text{et} \qquad W_2 = UI\cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right).$$

On a bien en effet :

$$W_1 + W_2 = UI\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right)\right]$$

$$= 2UI\cos\frac{\pi}{6}\cos\varphi = \sqrt{3}\,UI\cos\varphi = P.$$

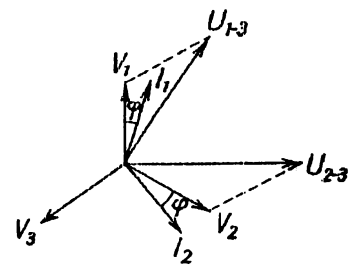


FIG. 11-47.

REMARQUE I. — Envisageons les cas particuliers suivants :

a) $\cos\varphi = 1$; $\varphi = 0$.

On a alors :

$$W_1 = W_2.$$

Lorsque les indications des deux wattmètres sont égales, le facteur de puissance est égal à 1.

b) $\cos\varphi = 0{,}5$ en déphasage avant ou arrière, l'un des deux wattmètres donne une déviation nulle.

Déphasage arrière du courant par rapport à la tension :

W_2 proportionnel à $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2}$ est nul :

$$\left(\varphi = +\frac{\pi}{3}\right).$$

Déphasage avant du courant par rapport à la tension :

W_1 proportionnel à $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2}$ est nul :

$$\left(\varphi = -\frac{\pi}{3}\right).$$

c) $\cos\varphi < 0{,}5$.

Déphasage arrière :

$\varphi > \frac{\pi}{3}$; W_2 proportionnel à $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right)$ devient négatif.

Déphasage avant :

$\varphi > \frac{\pi}{3}$; W_1 proportionnel à $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)$ devient négatif ($-\varphi$ est > 0).

Les déviations des deux wattmètres sont de sens contraire ; on a alors :

$$P = W_1 - W_2 \qquad \text{ou} \qquad P = W_2 - W_1.$$

Lorsque les déviations sont de signe contraire, il faut retrancher la puissance indiquée par l'un des wattmètres de celle qui est lue sur l'autre.

Si les wattmètres n'ont qu'un sens de déviation, il suffira pour pouvoir effectuer une lecture au moment où l'aiguille de W_2 se calera à gauche du zéro, de croiser les connexions du fil fin, mais on se souviendra alors qu'ayant effectué cette opération, l'indication W_2 est à retrancher de W.

Remarque II. — Quand on croise les connexions de la bobine fil fin d'un wattmètre, le courant dans cette bobine subit un déphasage de π

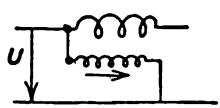


Fig. 11-48.

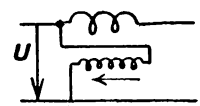


Fig. 11-49.

(fig. 48 et 49) sur le graphique, cette opération se traduit par déphasage de π du vecteur tension qui est proportionnel à ce courant et en phase avec lui.

Par exemple, croiser les connexions du fil fin du wattmètre W_1 revient à déphaser de π le vecteur U_{1-3}. La position relative des vecteurs U_{1-3} et U_{2-3} dépendra donc de la façon dont les connexions avec les bobines de fil fin auront été établies dans chacun des deux wattmètres.

Si les deux wattmètres sont de même modèle, il sera facile d'avoir des connexions correctes ; il suffira, dans chacun des appareils, de relier la même borne fil fin à une borne gros fil, la même au conducteur sans bobine gros fil.

Dans le cas contraire, on appliquera, pour vérifier si les connexions sont correctes (c'est-à-dire telles que le sens des déviations donne le signe à affecter aux lectures), diverses règles dont nous donnons ci-dessous les plus pratiques.

Remarque III. — La méthode des deux wattmètres est exacte, même si les courants ne sont pas sinusoïdaux.

Remarque IV. — La lecture de W^1 est la plus grande si I est en retard et la plus faible si I est en avance (1). Si l'on ignore le sens du déphasage, on peut toujours le modifier dans un sens connu. On note l'influence de cette modification sur les deux lectures.

17. Montage correct de deux wattmètres. Règles pratiques. — Le montage de deux wattmètres dans la mesure d'une puissance active triphasée est correct lorsque le sens des déviations donne en même temps le signe à attribuer à la lecture la plus faible. Le montage est correct :

(1) Uniquement pour un système à succession directe.

1° Lorsque les wattmètres de même modèle sont connectés identiquement, c'est-à-dire que la borne commune (au gros fil et au fil fin) est la même pour tous les deux (fig. 50).

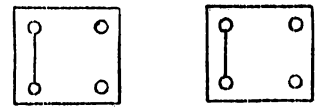


FIG. 11-50.

2° Lorsque le sens des déviations correspond au cos φ que l'on connaît approximativement : par exemple si le récepteur est très peu inductif (cos φ voisin de 1), les connexions doivent déterminer des déviations de même sens pour les deux appareils.

3° Enfin si l'on n'est pas fixé sur le facteur de puissance du récepteur, on l'améliore (charge d'un moteur si celui-ci constitue le récepteur, branchement de lampes en parallèle avec le récepteur préexistant). Si à ce moment l'instrument qui donnait la plus faible indication dévie *davantage*, c'est que les lectures doivent être *ajoutées* ; dans le cas contraire, elles doivent être retranchées l'une de l'autre.

Pour comprendre cette règle, il suffit de se reporter à la figure 47 et d'observer qu'une amélioration de cos φ a pour effet de faire tourner *dans le sens antihoraire* le vecteur I_2 correspondant au wattmètre W_2 qui donnait la plus faible déviation. Avec $\varphi > 60°$, le déphasage qui intéresse W_2 se rapproche de $\frac{\pi}{2}$ (cosinus nul) ; avec $\varphi < 60°$, ce déphasage se rapproche de zéro (cosinus égal à 1).

Il existe d'autres règles d'une application moins commode que les précédentes.

REMARQUE V. — Quand le réseau est équilibré, la méthode des deux wattmètres permet de déterminer aisément le cos φ du récepteur. On peut écrire, en effet :

$$\frac{W_1 - W_2}{W_2 + W_1} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)} = \frac{2 \sin\frac{\pi}{6} \sin\varphi}{2 \cos\frac{\pi}{6} \cos\varphi} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} \operatorname{tg}\varphi.$$

Posons $\frac{W_2}{W_1} = \alpha$ (rapport inférieur à 1, car on a $W_2 < W_1$) :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\varphi = \frac{1-\alpha}{\alpha+1},$$

d'où :

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}\,\frac{1-\alpha}{\alpha+1}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+3\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^2}} = \frac{1+\alpha}{2\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}.$$

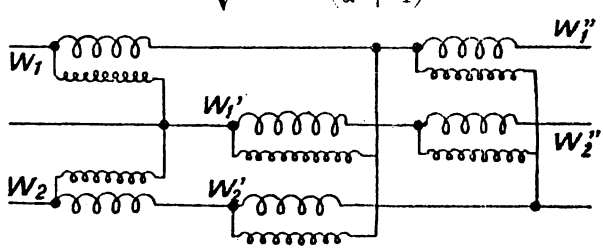


FIG. 11-51.

Des tableaux d'un emploi courant dans les laboratoires d'essais donnent cos φ en fonction du rapport $\frac{W_2}{W_1}$. Mais cos φ ainsi calculé n'est

juste que si le *système est équilibré*, en effet, si on considère les trois façons de monter les deux wattmètres (fig. 51), on a toujours :

$$P = W_1 + W_2 = W'_1 + W'_2 = W''_1 + W''_2 ;$$

mais les rapports : $\frac{W_1}{W_2}, \frac{W'_1}{W'_2}, \frac{W''_1}{W''_2}$

ne sont égaux que si sur les trois phases, on a des valeurs égales pour U, I et φ.

REMARQUE VI. — Si l'on connaît l'ordre de succession des phases, la méthode permet de déterminer φ en grandeur et *en signe*, ce qui n'est pas possible quand on emploie 3 wattmètres.

II. — Mesure de la puissance réactive

Puisque dans les expressions des puissances, il suffit de remplacer *cos* par *sin* pour passer des expressions de la puissance active aux expressions de la puissance réactive, il suffit de remplacer les wattmètres par des varmètres et d'appliquer les mêmes formules pour passer de la mesure des puissances actives à la mesure des puissances réactives [1].

Mais l'emploi de varmètres est rare en polyphasé [2] parce que *des wattmètres convenablement montés* permettent la mesure de la *puissance réactive* [3]. Nous le montrerons dans les deux systèmes les plus importants : le système diphasé et le système triphasé.

18. **Mesure de la puissance réactive d'un système diphasé.** — 1° SYSTÈME ÉQUILIBRÉ. — Un wattmètre monté comme l'indique la figure 52, indique :

$$W = U_{2-3} I_1 \cos(\vec{U}_{2-3}, \vec{I}_1) = V_2 I_1 \cos(\vec{V}_2, \vec{I}_1).$$

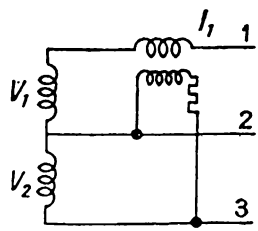


FIG. 11-52.

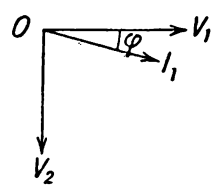


FIG. 11-53.

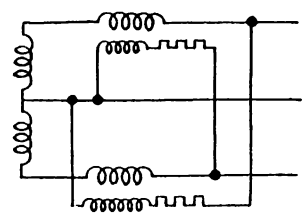


FIG. 11-54.

Le graphique (fig. 53) montre que l'on a :

$$W = VI \sin \varphi.$$

D'où :

$$Q = 2VI \sin \varphi = 2W.$$

(1) La méthode des deux wattmètres s'applique à la mesure de la puissance réactive triphasée si on remplace les wattmètres par des varmètres.

(2) Il se justifie quand le facteur de puissance est très faible. C'est alors que le varmètre est le plus précis.

(3) Souvent on détermine la puissance réactive à partir de la puissance active et de la puissance apparente, celle-ci mesurée au moyen de voltmètres et d'ampèremètres.

2° Système déséquilibré.

Si le système n'est pas équilibré, on aura :

$$Q = W_1 + W_2,$$

W_1 et W_2 désignant les indications de 2 wattmètres montés comme l'indique la figure 54.

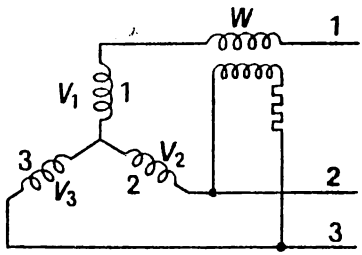


Fig. 11-55.

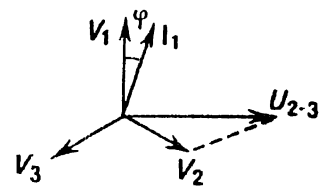


Fig. 11-56.

19. **Mesure de la puissance réactive d'un système triphasé.** — 1° Système équilibré. — En équilibré, il suffit de monter un wattmètre comme le montre la figure 55. En effet, l'appareil indique, dans ce cas :

$$W = U_{2-3} I_1 \cos(\vec{U}_{2-3}, \vec{I}_1) \quad \text{avec} \quad \vec{U}_{2-3} = \vec{V}_2 - \vec{V}_3,$$

soit (fig. 56) :

$$W = UI \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = UI \sin \varphi.$$

D'où :

$$Q = \sqrt{3}\, UI \sin \varphi = \sqrt{3}\, W.$$

2° Système a trois fils déséquilibré en courants, mais équilibré en tensions (*tensions composées égales et à 120°*). — C'est un cas fréquent en pratique. On peut alors :

a) *Utiliser trois wattmètres* montés comme l'indique la figure 57. En effet :

$$W_1 = U_{2-3} I_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = U_{2-3} I_1 \sin \varphi_1 = \sqrt{3} V I_1 \sin \varphi_1$$

$$W_2 = U_{3-1} I_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right) = U_{3-1} I_2 \sin \varphi_2 = \sqrt{3} V I_2 \sin \varphi_2$$

$$W_3 = U_{1-2} I_3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_3\right) = U_{1-2} I_3 \sin \varphi_3 = \sqrt{3} V I_3 \sin \varphi_3.$$

D'où :

$$Q = VI_1 \sin \varphi_1 + VI_2 \sin \varphi_2 + VI_3 \sin \varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} (W_1 + W_2 + W_3).$$

b) *Utiliser deux wattmètres seulement, mais en constituant un point neutre.* C'est la méthode *Iliovici.*

Le montage est celui de la figure 58. Trois résistances R *égales* ont servi à constituer un point neutre 0. L'expression précédente de Q peut s'écrire :

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{T} \int_0^T (i_1 u_{2-3} + i_2 u_{3-1} + i_3 u_{1-2})\, dt$$

(petites lettres pour représenter les valeurs instantanées des u et des i).

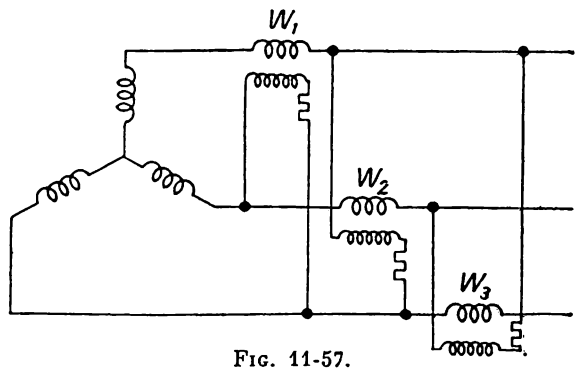


FIG. 11-57.

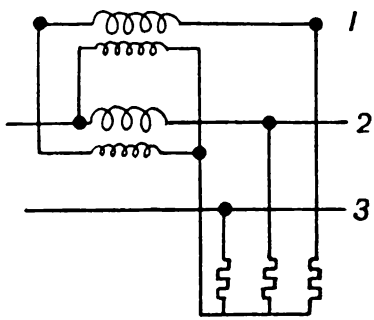


FIG. 11-58.

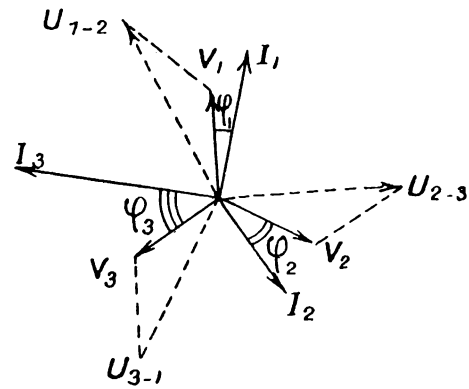


FIG. 11-59.

Le système étant à trois fils, on a nécessairement :

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \qquad \text{d'où} \qquad i_3 = -i_1 - i_2.$$

D'où en remplaçant i_3 par l'expression précédente :

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{T} \int_0^T (i_1 u_{2-3} + i_2 u_{3-1} - i_1 u_{1-2} - i_2 u_{1-2})\, dt$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{T} \int_0^T [i_1 (u_{2-3} - u_{1-2}) + i_2 (u_{3-1} - u_{1-2})\, dt.$$

Avec :

$$u_{2-3} = v_2 - v_3$$
$$u_{1-2} = v_1 - v_2.$$

D'où :

$$u_{2-3} - u_{1-2} = v_2 - v_3 - v_1 + v_2 = 2v_2 - (v_1 + v_3),$$

v_1, v_2, v_3 désignant les tensions instantanées simples entre les fils de phases et un point neutre obtenu au moyen de résistances *égales*, on peut écrire :

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0 \qquad \text{d'où} \qquad v_1 + v_3 = -v_2.$$

Dès lors l'équation précédente s'écrit :

$$u_{2-3} - u_{1-2} = 2v_2 + v_2 = 3v_2.$$

On obtiendrait de même :

$$u_{3-1} - u_{1-2} = -3v_1.$$

Remplaçons, dans l'expression de Q, les quantités entre parenthèses par ces expressions :

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{T} \int_0^T (3v_2 i_1 - 3v_1 i_2)\, dt = \sqrt{3} \frac{1}{T} \int_0^T (v_2 i_1 - v_1 i_2)\, dt.$$

La figure 58 montre que les wattmètres donnent les valeurs moyennes W_1 et W_2 des deux termes de l'intégrale. On a donc :

$$Q = \sqrt{3}\,(W_1 - W_2).$$

Le graphe (fig. 59) établi dans le cas d'un système équilibré donne :

$$W_1 - W_2 = \frac{U}{\sqrt{3}} I_1 \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right) - \frac{U}{\sqrt{3}} I_2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right)$$

$$W_1 - W_2 = \frac{UI}{\sqrt{3}} \times 2 \sin\varphi \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{UI}{\sqrt{3}} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\varphi = UI \sin\varphi.$$

D'où :

$$Q = \sqrt{3}\,(W_1 - W_2).$$

On voit que W_2 est toujours négatif ; donc $-W_2$ est toujours positif. Quant à W_1, il est positif pour $\varphi > 30^\circ$ et négatif pour $\varphi < 30^\circ$.

En définitive, il faut :

— ajouter les indications des wattmètres pour $\cos\varphi < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

— retrancher les indications des wattmètres pour $\cos\varphi > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

20. **Conventions relatives aux systèmes triphasés.** — La *puissance* d'un système triphasé s'entend toujours pour l'ensemble des trois phases.

La *tension* d'un réseau triphasé s'entend toujours entre phases et non entre phase et neutre.

Le *courant* d'un moteur triphasé est, sauf spécification contraire, le courant efficace dans la ligne (intensité composée) reliant le moteur au réseau et non dans chacun des enroulements (intensité simple) si celui-ci est en triangle.

21. **Avantages des systèmes polyphasés.** — Les systèmes polyphasés sont beaucoup plus employés, en électrotechnique, que les systèmes monophasés. C'est parce que :

1° *Leur puissance instantanée est constante.* — Soit un système de n phases équilibrées, chacune caractérisée par les grandeurs (notations habituelles) V, J, φ. Prenons pour origine des phases la tension dans le premier circuit. Les n puissances instantanées s'écrivent :

$$p_1 = ei = E_m \sin \omega t \, J_m \sin (\omega t - \varphi) \quad \text{avec} \quad E_m = V\sqrt{2} \quad \text{et} \quad J_m = J\sqrt{2}.$$

D'où :

$$p_1 = \sqrt{2}\, V \sin \omega t \times \sqrt{2}\, J \sin (\omega t - \varphi)$$

soit :

$$p_1 = 2VJ \sin \omega t \sin (\omega t - \varphi) = VJ \left[\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)\right];$$

$$p_2 = 2VJ \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{n}\right) \sin \left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$= VJ \left[\cos \varphi - \cos \left(2\omega t - \varphi - 2 \times \frac{2\pi}{n}\right)\right];$$

$$p_n = 2VJ \sin \left[\omega t - (n-1)\frac{2\pi}{n}\right] \sin \left[\omega t - \varphi - (n-1)\frac{2\pi}{n}\right]$$

$$= VJ \left\{ \cos \varphi - \cos \left[2\omega t - \varphi - 2(n-1)\frac{2\pi}{n}\right] \right\}.$$

La puissance instantanée totale est :

$$p_t = p_1 + p_2 + \dots + p_n,$$

soit :

$$p_t = nVJ \cos \varphi - VJ \sum_{j=0}^{j=n-1} \cos \left(2\omega t - \varphi - 2j\frac{2\pi}{n}\right).$$

La somme $\sum_{j=0}^{j=n-1}$ est nulle car elle est la somme de n grandeurs sinusoïdales égales et régulièrement déphasées de $\frac{2\pi}{n}$. Cette somme est nulle à tout instant [1].

Il reste $p_t = nVJ \cos \varphi =$ constante.

Cela constitue un avantage dans les cas suivants :

a) Des résonances sont à craindre entre le couple pulsatoire du moteur et des transmissions élastiques ;

b) En traction, le couple maximal doit être toujours inférieur au couple adhérent Pf (P = poids adhérent, f coefficient tenant compte du frottement des roues sur leur chemin de roulement), sinon les roues « patinent ». Le couple moyen du moteur monophasé devra donc se maintenir nettement au-dessous de cette limite ; celui du moteur polyphasé peut s'en approcher beaucoup plus.

Par ailleurs, le couple pulsatoire des machines monophasées provoque des trépidations qui obligent à rendre plus robustes les fondations sur lesquelles ces machines reposent.

2° *Ils permettent la production de flux glissants.* — Cette propriété, que nous exposerons dans l'étude des machines (tome II) est extrêmement importante, car elle permet la constitution de générateurs et moteurs particulièrement simples, robustes, économiques.

3° Ils permettent le transport d'une puissance donnée avec *une masse de métal plus faible* qu'en monophasé.

SYSTÈMES NON ÉQUILIBRÉS

On dit qu'un système polyphasé de vecteurs représentant des grandeurs sinusoïdales est *équilibré* ou *symétrique* lorsque les vecteurs qui le composent ont même module et sont déphasés l'un par rapport à l'autre d'un même angle. Si ces conditions ne sont pas remplies, le système est *non équilibré* ou *non symétrique.*

L'étude des systèmes non équilibrés peut être faite :

a) Directement, par la méthode vectorielle ou symbolique ;

b) Indirectement par la méthode dite « des composantes symétriques ».

Nous montrerons comment s'appliquent ces différentes méthodes au cas le plus fréquent dans la réalité technique : celui de *tensions équilibrées* (tensions composées) appliquées à un récepteur non équilibré.

Méthodes vectorielle et symbolique

Le problème est le suivant : dans un système triphasé équilibré en tensions, sans fil neutre, trois récepteurs différents sont montés en étoile. Déterminer les courants dans ces récepteurs et les tensions aux bornes de chacun d'eux.

22. **Méthode vectorielle.**

1° *Montage en triangle*

Chaque récepteur est sous une tension composé connue. Le courant qui le traverse est de la forme U/Z. Chaque courant de ligne est la différence vectorielle de deux courants dans deux récepteurs.

2° *Montage en étoile avec fil neutre non résistif*

Chaque récepteur est placé sous une tension simple V. Le courant qui le traverse est la forme $V/Z = YV$. Le courant dans le fil neutre est la somme vectorielle des trois courants dans les récepteurs.

3° *Montagne étoile sans fil neutre*

Il faut parvenir à placer le point N sur le diagramme de Fresnel.

La formule (3) p. 279 peut s'écrire $\frac{\overline{V_{NO}}}{\overline{V_{AO}}} = \frac{\overline{I_4}}{\overline{I_0}}$

I_4 est en grandeur et phase le courant dans le fil neutre, que l'on aurait calculé dans le paragraphe précédent, avec les trois récepteurs restant disposés en étoile et alimentés chacun par une tension simple. I_0 est le courant total traversant les trois récepteurs placés en parallèle sous la tension V_{AO}

Le point N est connu en remarquant que

$$V_{NO} = V_{AO} \cdot \frac{I_4}{I_0}$$

et $\quad (\overrightarrow{V_{NO}}, \overrightarrow{V_{AO}}) = (\overrightarrow{I_4}, \overrightarrow{I_0})$

23. **Méthode symbolique.** — Elle constitue la transposition dans la notation symbolique des méthodes appliquées aux réseaux complexes à courant continu : méthode de Kirchhoff ou méthodes de transfiguration des réseaux [2].

1° *Système étoile avec fil neutre.* — La méthode de Kirchhoff conduit rapidement au résultat en faisant intervenir les admittances Y (inverses des impédances) des différents récepteurs.

Soit un générateur (fig. 60) dont le point neutre est en O et les trois tensions

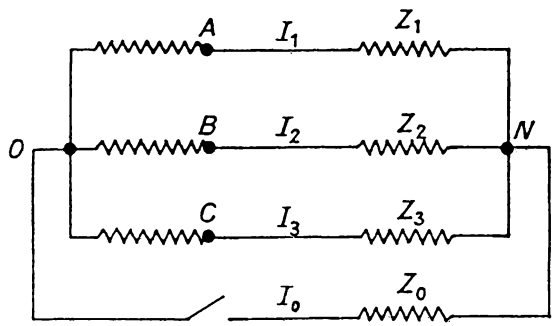


FIG. 11-60.

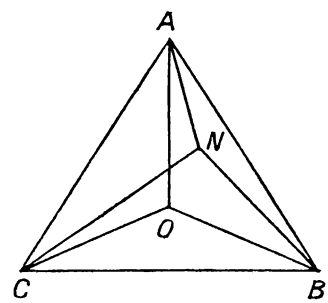


FIG. 11-61.

simples représentées par les vecteurs OA, OB, OC (fig. 61). Il alimente avec fil neutre 3 récepteurs à impédances Z_1, Z_2, Z_3 reliées en étoile à un point neutre N. On a en représentation vectorielle et en notation symbolique [3] :

$$\begin{cases} V_{AO} + V_{ON} + V_{NA} = 0 \\ V_{BO} + V_{ON} + V_{NB} = 0 \\ V_{CO} + V_{ON} + V_{NC} = 0 \end{cases} \quad \text{D'où} \quad \begin{cases} V_{AN} = V_{AO} - V_{NO} \\ V_{BN} = V_{BO} - V_{NO} \\ V_{CN} = V_{CO} - V_{NO} \end{cases} \qquad (1)$$

[1] Problème 12-5 dans la 8e édition du recueil : *Problèmes d'Électrotechnique à l'usage des Ingénieurs*, loc. cit.

[2] On peut aussi transposer en notation symbolique la méthode vectorielle. Voir problème 12-5, *loc. cit.*

[3] Afin d'alléger l'écriture nous nous dispenserons dorénavant de marquer, au-dessus des lettres U, V, Z, I le tiret de la notation symbolique ou la flèche de la notation vectorielle.

Mais d'autre part :

$$\begin{aligned} I_1 &= V_{AN}/Z_1 = V_{AN}Y_1 = Y_1(V_{AO} - V_{NO}) \\ I_2 &= V_{BN}/Z_2 = V_{BN}Y_2 = Y_2(V_{BO} - V_{NO}) \\ I_3 &= V_{CN}/Z_3 = V_{CN}Y_3 = Y_3(V_{CO} - V_{NO}) \\ I_n &= V_{ON}/Z_0 = V_{ON}Y_0 = Y_0 V_{ON} \end{aligned} \qquad (2)$$

La première loi de Kirchhoff donne :

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_0 = 0.$$

D'où :

$$Y_1(V_{AO} - V_{NO}) + Y_2(V_{BO} - V_{NO}) + Y_3(V_{CO} - V_{NO}) + Y_0 V_{ON} = 0$$

$$Y_1 V_{AO} + Y_2 V_{BO} + Y_3 V_{CO} - V_{NO}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_0) = 0$$

et :

$$V_{NO} = \frac{Y_1 V_{AO} + Y_2 V_{BO} + Y_3 V_{CO}}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_0}. \qquad (3)$$

Connaissant V_{NO}, les tensions simples V_{AN}, V_{BN}, V_{CN} sont données par les équations (1) et les courants en ligne par les équations (2).

On arrive au même résultat (souvent plus rapidement) en appliquant les méthodes de transfiguration des réseaux, par exemple en substituant à l'étoile le triangle équivalent [1].

2° *Système étoile sans neutre.* — Même méthode. Il suffit de faire $Y_0 = 0$ dans les expressions ci-dessus obtenues.

3° *Système en triangle.* — Dans ce cas :

a) On exprime en notation symbolique les courants simples.

b) On exprime les courants composés en utilisant les relations déjà données [3].

c) On note, puisqu'il n'y a pas de neutre, que la somme des courants composés est nulle [2].

Méthode des composantes symétriques

La simplicité des problèmes triphasés se rapportant à des systèmes *équilibrés* ou *symétriques* c'est-à-dire :

— comportant trois F. É. M. égales et déphasées de $2\pi/3$;
— des circuits de phases identiques ;

explique l'intérêt d'une méthode permettant de substituer, aux trois vecteurs concourants inégaux et inégalement déphasés représentant un système *déséquilibré*, des systèmes de *trois vecteurs équilibrés* dont il serait la résultante.

Ces systèmes sont appelés *composantes symétriques*. Une fois déterminés l'application du *principe de superposition* [3] aux grandeurs (tensions, courants, qu'ils représentent permet la résolution commode des problèmes triphasés déséquilibrés.

[1] Voir problème 12-5 (méthode par le théorème de Kennely) dans le *Recueil de problèmes*, 8e édition.
[2] Voir problème 12-5, *loc. cit.*
[3] Voir du même auteur, *Électricité fondamentale*, Dunod.

I. Conventions et définitions

Soit un système de vecteurs $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{V_3}$ (fig. 62) qui ont la même origine O.

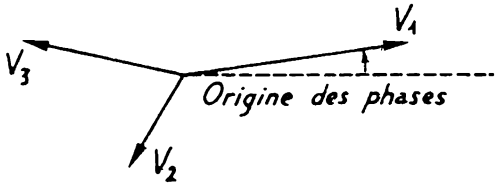


Fig. 11-62.

24. **Conventions.**—L'axe horizontal est pris comme origine des phases. L'angle que fait un vecteur avec l'axe origine est mesuré dans le sens *antihoraire* qui est le sens *positif* des déphasages. Chaque vecteur est affecté d'un indice.

25. **Définitions. Système direct. Système inverse.** — Les vecteurs représentent comme dans la représentation de Fresnel, des grandeurs sinusoïdales, supposées tourner dans le sens *antihoraire*.

Si un observateur (fig. 63) les voit dans l'ordre 1, 2, 3, le système

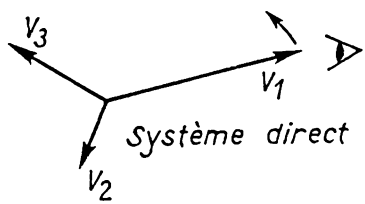


Fig. 11-63.

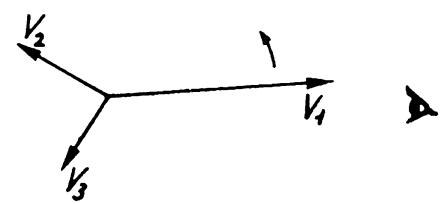


Fig. 11-64.

direct. Si l'observateur les voit dans l'ordre 1, 3, 2, le système est *inverse* (fig. 64).

Si les 3 vecteurs sont égaux et à 120°, les systèmes direct et inverse sont *symétriques*. Par la suite quand il sera question de systèmes direct et inverse, il s'agira toujours de systèmes symétriques.

Soulignons bien que tous les vecteurs, quand ils représentent des grandeurs sinusoïdales, tournent *tous dans le même sens* (antihoraire). Ce qui est inverse, c'est, pour un observateur immobile, leur *ordre de succession*.

26. **Opérateur *a*. Expression d'un système direct et inverse.** — L'opérateur a est un signe qui, accolé à un vecteur, signifie : *qui a tourné de 120° dans le sens positif (antihoraire)*. Il s'exprime par l'une des notations suivantes :

$$a\ ;\ 1\ \underline{|\ 120^\circ}\ ;\ 1\ \underline{|\ 2\pi/3}\ ;\ (\cos 2\pi/3 + j \sin 2\pi/3)\ ;\ -0{,}5 + j\ 0{,}866$$

et permet d'exprimer très simplement, à partir d'un vecteur sans opérateur appelé *vecteur de référence*, les 3 vecteurs d'un système symétrique.

Le système direct de la figure 65 s'exprime par V_{d1}, a^2V_{d1}, aV_{d1} et le système inverse de la figure 66 par V_{i1} aV_{i1}, a^2V_{i1}.

Cette notation a les mêmes avantages que la notation symbolique

(a correspond à j). Elle permet de traduire des constructions géométriques par des équations algébriques. Elle satisfait aux relations suivantes (fig. 67) :

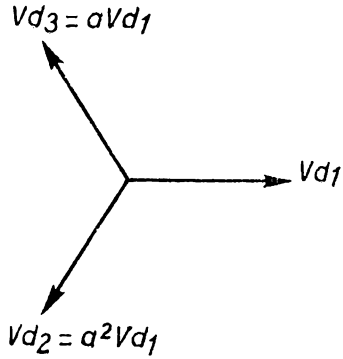


FIG. 11-65. — Système direct. Vecteur de référence Vd_1.

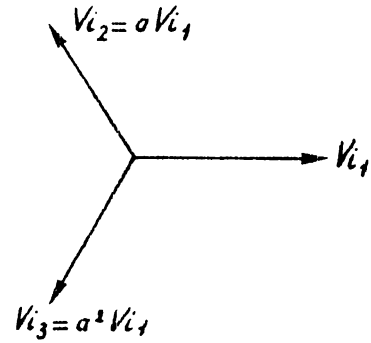


FIG. 11-66. — Système inverse. Vecteur de référence Vi_1.

$$1 + a + a^2 = 0$$

$$\begin{cases} 1 + a = -a^2 = 1 \,\underline{|\, 60^\circ} \\ 1 + a^2 = -a = 1 \,\underline{|\, -60^\circ} \\ a + a^2 = -1 \end{cases}$$

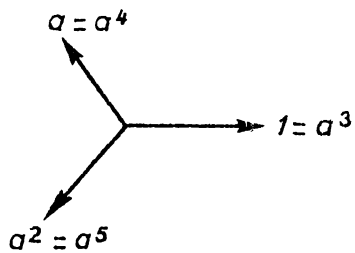


FIG. 11-67.

$$\begin{cases} 1 - a = \sqrt{3} \,\underline{|\, -30^\circ} \\ 1 - a^2 = \sqrt{3} \,\underline{|\, 30^\circ} \\ a - a^2 = \sqrt{3} \,\underline{|\, 90^\circ} \end{cases}$$

(1) $a^{-1} = a^2$

$a^{-2} = a$

(2) $$\begin{cases} \dfrac{1}{1-a} = \dfrac{1-a^2}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \,\underline{|\, 30^\circ} \\ \dfrac{1}{a-a^2} = \dfrac{a^2-a}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \,\underline{|\, -90^\circ} \end{cases}$$

(1) $a^3 = 1$ donc $1/a = a^2$.

(2) Égaler le produit des moyens et des extrêmes. Faire les constructions géométriques pour obtenir les modules.

27. **Système homopolaire. Expression.** — Un système *homopolaire* est formé d'un ensemble de vecteurs équipollents (égaux et en phase).

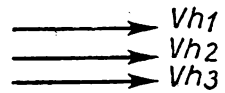


FIG. 11-68.

On a $V_{h1} = V_{h2} = V_{h3}$. On peut représenter ce système par $\overrightarrow{V_{h1}}$, $\overrightarrow{V_{h2}}$, $\overrightarrow{V_{h3}}$ (fig. 68).

28. **Théorème de Fortescue.** — *Un système de trois vecteurs quelconques V_1, V_2, V_3 peut être décomposé en trois systèmes de vecteurs symétriques : un système direct, un système inverse et un système homopolaire.*

Ces trois systèmes constituent les *composantes symétriques* du système non équilibré.

A partir de V_1, V_2, V_3, définissons 3 nouveaux vecteurs :

$$(1) \qquad V_d = \frac{1}{3}(V_1 + aV_2 + a^2V_3)$$

$$(2) \qquad V_i = \frac{1}{3}(V_1 + a^2V_2 + aV_3)$$

$$(3) \qquad V_h = \frac{1}{3}(V_1 + V_2 + V_3)$$

puis exprimons V_1, V_2, V_3 à partir de V_d, V_i, V_h :

Pour cela ajoutons (1) (2) (3) :

$$V_d + V_i + V_h = \frac{1}{3}[3V_1 + (a + a^2 + 1)V_2 + (a^2 + a + 1)V_3] = V_1.$$

Faisons ensuite la somme :

$$a^2V_d + aV_i + V_h = \frac{1}{3}[V_1(a^2 + a + 1) + V_2(a^3 + a^3 + 1) + V_3(a^4 + a^2 + 1)] = V_2.$$

Et enfin la somme :

$$aV_d + a^2V_i + V_h = \frac{1}{3}[V_1(a + a^2 + 1) + V_2(a^2 + a^4 + 1) + V_3(a^3 + a^3 + 1)] = V_3.$$

Groupons ces résultats :

$$\begin{aligned} V_1 &= V_d + V_i + V_h \\ V_2 &= a^2V_d + aV_i + V_h \\ V_3 &= aV_d + a^2V_i + V_h \end{aligned}$$

On voit que le système V_1, V_2, V_3 quelconque peut être remplacé par :

— le système V_d, a^2V_d, aV_d symétrique direct ;

— le système V_i, aV_i, a^2V_i symétrique inverse ;

— le système V_h, V_h, V_h homopolaire.

II. — Détermination d'un système quelconque à partir de ses composantes symétriques

29. **Méthode vectorielle. Méthode symbolique.** — Chacun des vecteurs du système quelconque est la résultante de 3 vecteurs pris respectivement dans chacun des systèmes symétriques. La figure 69 donne un exemple d'une telle détermination par la méthode vectorielle. On aboutirait évidemment au même résultat par la méthode symbolique.

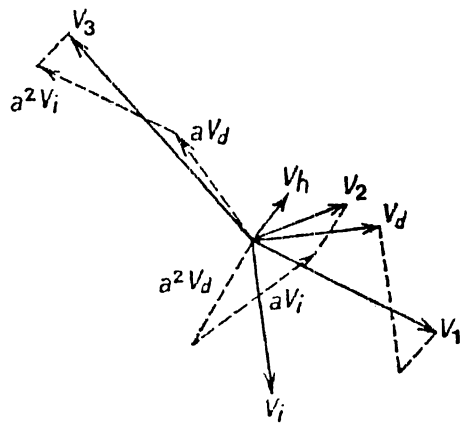


FIG. 11-69.

REMARQUE I. — Le vecteur $\overrightarrow{V_1}$ qui représente la tension *de référence du système quelconque* est la somme géométrique des vecteurs V_d, V_i, V_h qui sont les tensions de référence des systèmes direct, inverse et homopolaire.

REMARQUE II. — Il suffit de connaître le vecteur de référence d'un système symétrique pour connaître les deux autres vecteurs du même système.

REMARQUE III. — V_1, V_2, V_3 représentent des tensions *réelles*. Les composantes symétriques représentent des tensions *fictives* destinées à faciliter le calcul des courants des systèmes déséquilibrés. Néanmoins elles peuvent être mesurées [36].

III. — Décomposition d'un système déséquilibré en ses composantes symétriques

C'est le problème inverse du précédent, celui qui se pose le plus fréquemment. Démontrons préalablement une propriété importante.

30. **Systèmes de vecteurs dont les extrémités sont aux sommets d'un même triangle.** — L'équation (1) du paragraphe précédent peut s'écrire :

$$V_d = \frac{1}{3}\left[V_1 + aV_2 + a^2V_3 - V_1(1 + a + a^2)\right]$$

ou :

$$V_d = \frac{1}{3}[a(V_2 - V_1) + a^2(V_3 - V_1)]$$

et, à partir de l'équation (2), on écrirait de même :

$$V_i = \frac{1}{3}[a^2(V_2 - V_1) + a(V_3 - V_1)],$$

ce qui montre que les composantes directe et inverse ne dépendent que de la différence des vecteurs du système proposé (fig. 70). Dès lors :

Des systèmes de vecteurs dont les extrémités se trouvent aux sommets d'un même triangle ont tous les mêmes composantes directes et inverses. Ils ne diffèrent que par leurs composantes homopolaires.

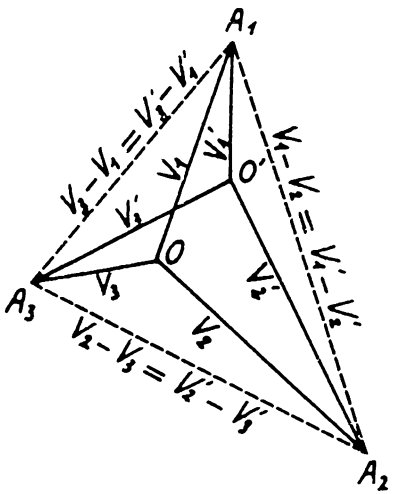


FIG. 11-70.

31. **Détermination de la composante homopolaire.** — *a*) MÉTHODE DIRECTE. — Elle consiste à appliquer l'équation de définition d'un système homopolaire :

$$\vec{V}_h = \frac{1}{3}\left(\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3\right),$$

c'est-à-dire de faire la somme géométrique des trois vecteurs du système non équilibré et d'en prendre le tiers.

b) Une *deuxième méthode* consiste à *joindre le point O* (origine des vecteurs du système) au *centre de gravité G du triangle* A_1, A_2, A_3 *formé par les extrémités des vecteurs.*

En effet, nous pouvons écrire (fig. 70 *bis*) :

$$\vec{V}_1 = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA_1};$$
$$\vec{V}_2 = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA_2};$$
$$\vec{V}_3 = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA_3}.$$

Ajoutons membre à membre :

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = 3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3}.$$

On sait que :

$$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3} = 0.$$

Donc :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}}{3} = \overrightarrow{V_h}.$$

REMARQUE I. — Quand les extrémités des vecteurs $\overline{V_1}$, $\overline{V_2}$, $\overline{V_3}$ sont fixes, la composante homopolaire varie avec la position du point de concours O de ces vecteurs par rapport au centre de gravité G du triangle A_1, A_2, A_3.

REMARQUE II. — La composante homopolaire conserve la même valeur absolue pour toute origine située sur une circonférence de centre G (fig. 71) et de rayon OG.

REMARQUE III. — Si l'on transporte l'origine des vecteurs au point A_1 (sommet du triangle), la composante homopolaire est A_1G (fig. 72).

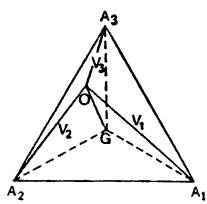


FIG. 11-70 *bis*.

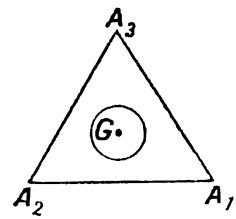


FIG. 11-71.

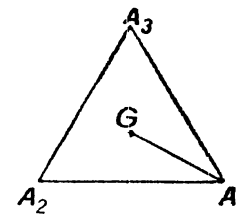


FIG. 11-72.

32. **Détermination des composantes directe et inverse.** — Nous avons établi [28] que tous les systèmes de vecteurs concourants aboutissant aux sommets d'un même triangle ont les mêmes composantes directe et inverse. Les systèmes direct et inverse jouissent, dans ce cas, de la propriété d'être indépendants de la position de l'origine.

On peut donc choisir arbitrairement la position du point O et de la façon la plus convenable pour simplifier la recherche des composantes V_d et V_i.

En pratique, on peut remplacer un système de vecteurs quelconques par un autre système ayant les *mêmes composantes* V_d *et* V_i, mais n'ayant *pas de composante homopolaire.*

1° MÉTHODE DIRECTE. — C'est l'application des équations de définition :

$$V_d = \frac{1}{3}(V_1 + aV_2 + a^2V_3);$$

$$V_i = \frac{1}{3}(V_1 + a^2V_2 + aV_3)$$

et consiste à prendre le tiers du vecteur somme géométrique des vecteurs V_1, aV_2, a^2V_3 (pour avoir V_d) et du vecteur somme géométrique des vecteurs V_1, aV_2, a^2V_3 (pour avoir V_i). Les vecteurs V_d et V_i sont ainsi déterminés en grandeur et en position.

Soit le système $V_1 = +3$; $V_2 = -4j$; $V_3 = -5$ dont nous devons déterminer les composantes symétriques.

a) *Méthode graphique.* — Le graphe est donné par la figure 73.

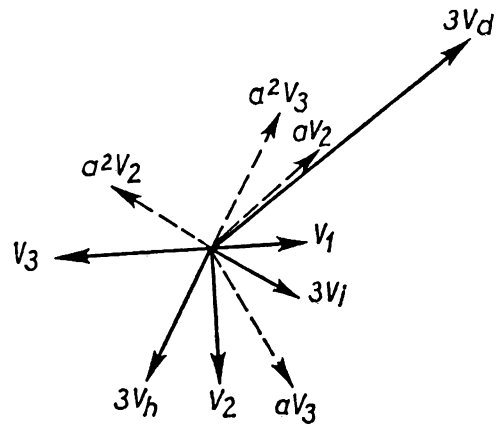


FIG. 11-73.

b) *Méthode par le calcul symbolique :*

$$3V_h = V_1 + V_2 + V_3 = 3 - j4 - 5 = -j4 - 2$$

$$3V_d = V_1 + aV_2 + a^2V_3 = 3 - j4\left(-\frac{1}{2} + j\sqrt{3}/2\right) - 5\left(-\frac{1}{2} - j\sqrt{3}/2\right)$$

$$3V_i = V_1 + a^2V_2 + aV_3 = 3 - j4\left(-\frac{1}{2} - j\sqrt{3}/2\right) - 5\left(-\frac{1}{2} + j\sqrt{3}/2\right).$$

Le calcul donne :

$$V_h = -j4/3 - 2/3 \; ; \quad V_d = 2{,}9 + j2{,}11 \; ; \quad V_i = 0{,}678 - j0{,}78.$$

2° MÉTHODE DU TRIANGLE ÉQUILATÉRAL (plus rapide). — Soient les vecteurs V_1, V_2, V_3 formant le système déséquilibré et le triangle ABC joignant leurs extrémités (fig. 74). Construisons de part et d'autre du côté BC, deux triangles équilatéraux $B'CB$, $B''CB$. Nous avons :

$$V_d = \frac{1}{3}(V_1 + aV_2 + a^2V_3) = \frac{1}{3}(V_1 + aV_2 - V_3 - aV_3)$$

$$= \frac{1}{3}[(V_1 - V_3) + a(V_2 - V_3)]$$

$$= \frac{1}{3}(CA + a \times CB)$$

$$= \frac{1}{3}(CA - CB') = \frac{1}{3}B'A$$

et de même :

$$V_i = \frac{1}{3}(V_1 + a^2V_2 + aV_3) = \frac{1}{3}(V_1 + a^2V_2 - V_3 - a^2V_3)$$

$$= \frac{1}{3}[(V_1 - V_3) + a^2(V_2 - V_3)]$$

$$= \frac{1}{3}(CA + a^2 \times CB)$$

$$= \frac{1}{3}(CA - CB'') = \frac{1}{3}B''A.$$

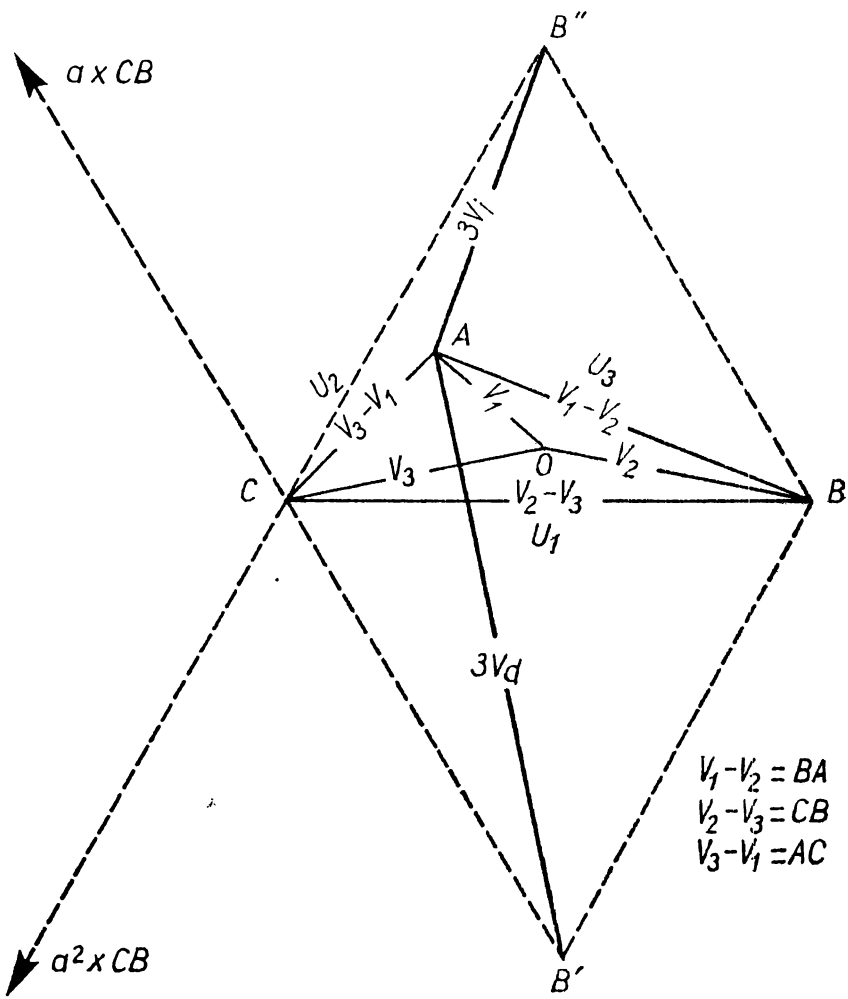


FIG. 11-74.

La construction géométrique est évidente (1) :

$$V_d = B'A/3 \qquad V_i = B''A/3.$$

33. **Composantes symétriques de tensions composées.** — Soit un système triphasé déséquilibré (3 ou 4 fils) dont les tensions simples sont V_1, V_2 et V_3 et les tensions composées U_{12}, U_{23}, U_{31}. Nous connaissons les équations :

$$\begin{aligned} V_1 &= V_d + V_i + V_h \\ V_2 &= a^2V_d + aV_i + V_h \\ V_3 &= aV_d + a^2V_i + V_h \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} U_{12} &= V_1 - V_2 \\ U_{23} &= V_2 - V_3 \\ V_{31} &= V_3 - V_1 \end{aligned}$$

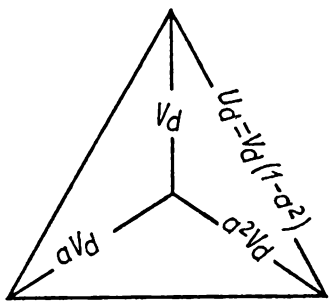


FIG. 11-75.

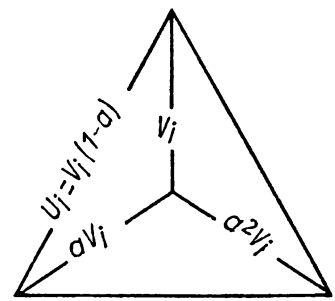


FIG. 11-76.

Composante homopolaire. — Elle est nulle, car on a :

$$3U_h = U_{12} + U_{23} + U_{31} = 0.$$

Composantes directe et inverse. — Nous avons :

$$\begin{aligned} U_{12} &= V_1 - V_2 = V_d(1 - a^2) + V_i(1 - a) \\ U_{23} &= V_2 - V_3 = V_d(a^2 - a) + V_i(a - a^2) \\ U_{31} &= V_3 - V_1 = V_d(1 - a) + V_i(a^2 - 1). \end{aligned}$$

On voit que la composante directe est :

$$V_d(1 - a^2) \quad ; \quad V_d(a^2 - a) \quad ; \quad V_d(1 - a)$$

et la composante inverse :

$$V_i(1 - a) \quad ; \quad V_i(a - a^2) \quad ; \quad V_i(a^2 - 1).$$

Si nous prenons le vecteur $V_1 - V_2$ comme vecteur de référence, les vecteurs de référence des composantes directe et inverse sont donc :

$$\begin{aligned} U_d &= V_d(1 - a^2) = V_d\sqrt{3}\,\underline{|\,\pi/6} \\ U_i &= V_i(1 - a) = V_i\sqrt{3}\,\underline{|\,-\pi/6} \end{aligned}$$

C'est ce qui apparaît sur les graphes des figures 75 et 76.

(1) Nous conseillons au lecteur de déterminer, par cette construction graphique, les composantes symétriques du système proposé dans le paragraphe précédent.

34. **Existence des composantes homopolaires.** — 1° *Systèmes de courants.* — Un système de courants homopolaires ne peut pas exister dans un réseau triphasé *étoile sans neutre.* En effet, on a nécessairement :

$$3I_h = I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

ainsi que dans les fils de *ligne* d'un système en triangle.

Par contre il peut exister dans les phases (les enroulements) du système en triangle : il n'y a aucune raison pour que la somme des courants J soit nulle.

2° *Systèmes de tensions.* — Une tension homopolaire *ne peut pas exister* dans le système de tensions *composées* (tensions de lignes) car on a toujours :

$$U_{12} + U_{23} + U_{31} = 3U_h = 0.$$

Par contre une tension homopolaire *peut exister* dans le système de *tensions V* (tensions simples) d'un système groupé *en étoile.* Ces propriétés se correspondent par *dualité.*

IV. — Application aux systèmes triphasés déséquilibrés de la théorie des composantes symétriques

35. **Impédances d'un générateur ou d'un récepteur triphasé.** — Quand un système de tensions quelconques est appliqué à un récepteur triphasé, la question tout d'abord se pose de savoir si, vis-à-vis des composantes symétriques de ces tensions, le récepteur ou le générateur présentera la même *impédance.* Nous désignerons par Z_d, Z_i, Z_h ces trois impédances.

1° Impédances directe et inverse

1er cas. *Le réseau ne comporte que des éléments statiques* dont les propriétés sont indépendantes de l'ordre de succession des phases (inductances, capacités, lignes de transport d'énergie, transformateurs, etc.). On a, dans ce cas $Z_d = Z_i$. La valeur commune à ces impédances est alors facile à mesurer.

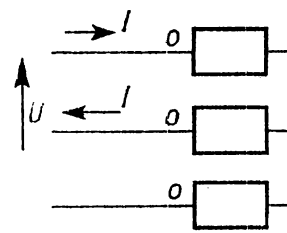


Fig. 11-77.

On couple le système en étoile. On lui applique une tension U. On mesure le courant I (fig. 77).

En posant $Z_d = Z_i = Z$, on a alors $U = 2ZI$. D'où $Z = U/2I$,

2e Cas. *Le réseau comporte des machines tournantes.* Dans ce cas, on a toujours $Z_d \neq Z_i$. Cela tient à la dissymétrie que crée la rotation (dont le sens peut être direct ou inverse).

On détermine Z_d par le rapport V_d/I_d et Z_i par le rapport V_i/I_i. Le problème se ramène à la mesure de V_d, V_i et I_d, I_i. Nous exposons plus loin [38] ces mesures.

2° Impédance homopolaire. — Quand il y a une tension et un courant homopolaires, il n'y a qu'une impédance homopolaire Z_h.

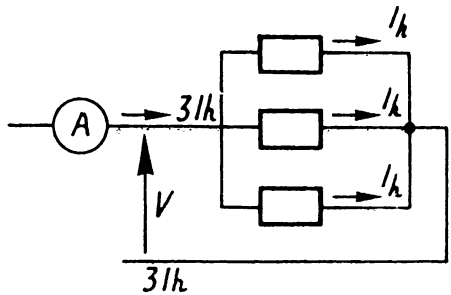


Fig. 11-78.

Pour la mesurer, il suffit (fig. 78) d'appliquer une tension V aux 3 récepteurs réunis en parallèle. On a :

$$Z_h = V/I = 3V/(3I)$$

$3I$ étant le courant total fourni au système.

Remarque. — Le courant dans le fil neutre d'un réseau triphasé à 4 fils est le *triple* du courant homopolaire. Par suite, si une impédance totale Z se trouve sur ce fil, elle est équivalente à une impédance $3Z$ parcourue par le courant $I_h(Z_h = 3Z)$.

Cela explique pourquoi l'impédance homopolaire Z_h est souvent supérieure à Z_d et Z_i (1).

36. **Principe de l'application des composantes symétriques à un réseau triphasé.** — C'est le principe de superposition. Il consiste à :

1° Décomposer le système de tensions triphasées quelconques en ses composantes symétriques ;

2° Connaissant impédances Z_d, Z_i, Z_h, calculer les courants que, dans chacun des fils, engendreraient les composantes symétriques des tensions ;

3° Faire, dans chaque fil, la somme de ces courants. Cela revient à ramener le problème triphasé à trois problèmes *monophasés.*

(1) Dans les lignes de transport Z_d et Z_i sont de 0,43 Ω/km environ, alors que Z_h varie de 1 à 1,5 Ω/km.

Soient 3 tensions *déséquilibrées* (fig. 79) appliquées à un **réseau triphasé** ***symétrique*** (moteurs, transformateurs triphasés) c'est-à-dire dont les impédances Z_d, Z_i, Z_h sont les mêmes sur les 3 phases.

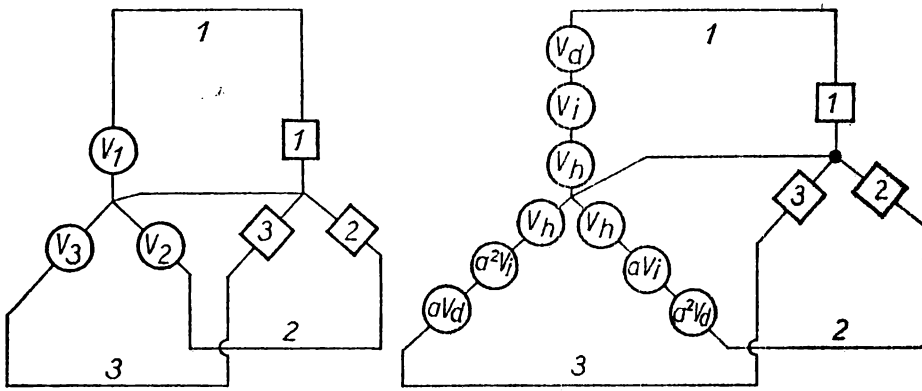


FIG. 11-79.

Remplaçons V_1, V_2, V_3 par leurs composantes symétriques (en prenant la tension V_1) comme tension de référence.

Là dessus, imaginons que chacun des systèmes (direct, inverse, homopolaire) de tensions symétriques *agit seul* sur le récepteur qui lui oppose l'impédance correspondante (fig. 80).

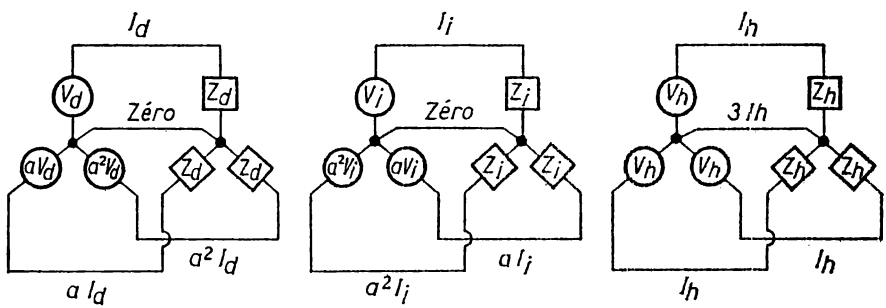


FIG. 11-80.

Ajoutons, pour chaque fil, les courants que chacun des systèmes y créerait. Nous obtenons :

$$(1)\quad \begin{cases} I_1 = I_h + I_d + I_i \\ I_2 = I_h + a^2 I_d + a I_i \\ I_3 = I_h + a I_d + a^2 I_i \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} I_d = V_d/Z_d \\ I_i = V_d/Z_i \\ I_h = V_h/Z_h \end{cases} \quad (2)$$

38. **Mesure des composantes symétriques des tensions.** — 1° *Mesure d'une tension homopolaire.* — Soit (fig. 81) le système triphasé avec un fil neutre relié à un point neutre N du système.

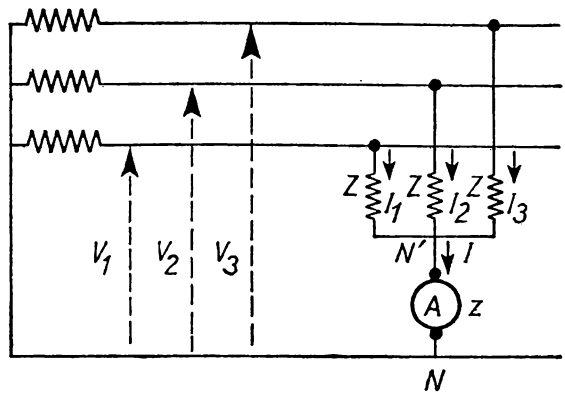


Fig. 11-81.

Avec 3 impédances Z identiques, constituons un point neutre artificiel N' et branchons un ampèremètre d'impédance z entre N et N'. Cet ampèremètre mesure I. Nous avons :

$$V_1 + V_2 + V_3 = (ZI_1 + zI) + (ZI_2 + zI) + (ZI_3 + zI) = Z(I_1 + I_2 + I_3) + 3zI.$$

Or

$$I_1 + I_2 + I_3 = I \qquad \text{et} \qquad V_1 + V_2 + V_3 = 3V_h.$$

Donc :

$$3V_h = ZI + 3zI \qquad \text{d'où} \qquad V_h = I(Z + 3z)/3.$$

Le courant I indiqué par l'ampèremètre est proportionnel à la tension V_h. Les impédances Z sont choisies assez élevées pour ne pas perturber le système. Le dispositif décrit est un *filtre de tension homopolaire.*

2° *Mesure des composantes directe et inverse.* — On fait le montage de la figure 83 dans laquelle le voltmètre V d'impédance Z_1 est connecté à la phase 1 de référence et les valeurs particulières de Z_2 et Z_3 sont :

$$Z_2 = R + jL\omega \text{ (avec } L\omega = R\sqrt{3}) \qquad \text{soit} \quad Z_2 = R(1 + j\sqrt{3}) = -2a^2R \qquad \text{(fig. 82)}$$

$$Z_3 = R - j/C\omega \text{ (avec } 1/C\omega = R\sqrt{3}) \qquad \text{soit} \quad Z_3 = R(1 - j\sqrt{3}) = -2aR. \qquad \text{(fig. 82)}$$

On a les relations :

(1) $V_2 - V_1 = Z_2 I_2 - Z_1 I_1$.

(2) $V_3 - V_1 = Z_3 I_3 - Z_1 I_1$.

Multiplions (1) par Z_3 ; (2) par Z_2, puis ajoutons (1) et (2) :

$$Z_3(V_2 - V_1) + Z_2(V_3 - V_1) = Z_2 Z_3(I_2 + I_3) - I_1(Z_1 Z_3 + Z_1 Z_2).$$

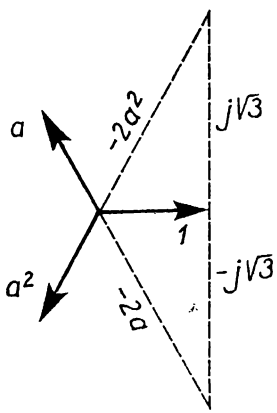


FIG. 11-82.

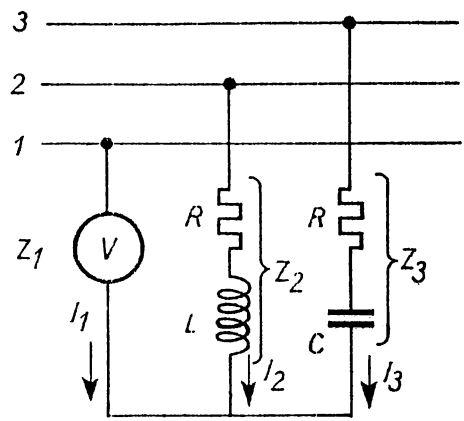


FIG. 11-83.
$L\omega = 1/C\omega = R\sqrt{3}$

Soit, en tenant compte de : $I_2 + I_3 = -I_1$:

$$Z_3(V_2 - V_1) + Z_2(V_3 - V_1) = -Z_2 Z_3 I_1 - I_1(Z_1 Z_3 + Z_1 Z_2).$$

Donc enfin :

$$I_1 = \frac{Z_3(V_1 - V_2) + Z_2(V_1 - V_3)}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}.$$

Remplaçons Z_2 et Z_3 par leurs expressions données et V_1, V_2, V_3 par leurs expressions en fonction de leurs composantes symétriques [28] :

$$Z_3(V_1 - V_2) = -2aR[V_d(1 - a^2) + V_i(1 - a)]$$
$$= -2R[(a - a^3)V_d + (a - a^2)V_i]$$
$$Z_3(V_1 - V_2) = 2R[(1 - a)V_d + (a^2 - a)V_i].$$

Nous obtenons de même :

$$Z_2(V_1 - V_3) = -2a^2R[V_d(1 - a) + V_i(1 - a^2)]$$
$$= -2R[V_d(a^2 - a^3) + V_i(a^2 - a^4)]$$
$$Z_2(V_1 - V_3) = 2R[(1 - a^2)V_d + (a - a^2)V_i].$$

D'autre part :

$$Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3 = Z_1(-2a^2R) + Z_1(-2aR) + 4a^3R^2$$
$$= 2Z_1R(-a-a^2) + 4R^2 = 2Z_1R + 4R^2 = 2R(Z_1 + 2R).$$

Et l'on a finalement :

$$I_1 = \frac{2R[(1-a)V_d + (a^2-a)V_i] + 2R[(1-a^2)V_d + (a-a^2)V_i]}{2R(Z_1 + 2R)}.$$

Soit :

$$I_1 = \frac{V_d(1-a+1-a^2) + V_i(a^2-a+a-a^2)}{Z_1 + 2R} = \frac{3V_d}{Z_1 + 2R}$$

et la tension indiquée par le voltmètre est :

$$V = Z_1I_1 = 3Z_1V_d/(Z_1 + 2R) \qquad \text{d'où} \qquad V_d = V(Z_1 + 2R)/3Z_1$$

et si on réalise la condition $Z_1 = R$ on a :

$$V_d = 3RV/3R = V.$$

En permutant Z_2 et Z_3 on lirait sur le voltmètre une tension proportionnelle à la composante inverse V_i.

Le montage indiqué (fig. 83) constitue un *filtre de composantes directes ou inverses.*

39. **Mesure des composantes symétriques des courants.** — 1° *Système à 4 fils. Mesure de la composante homopolaire.* — On place en parallèle les 3 secondaires de 3 transformateurs identiques de courant (fig. 85). Un ampèremètre A mis en dérivation sur les 3 secondaires des

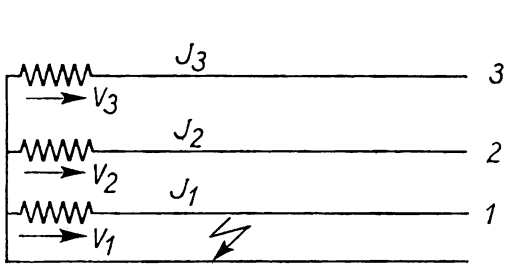


FIG. 11-84.

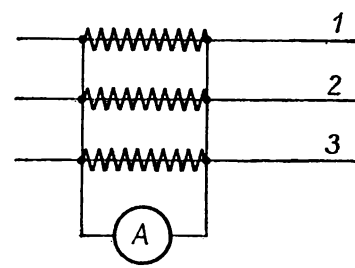


FIG. 11-85.

transformateurs donne (au rapport de transformation m près) la somme $I_1 + I_2 + I_3 = I_h3$.

2° *Système à 3 fils. Composantes directe et inverse.* — On dispose de deux impédances étalonnées Z_1 et Z_2. On les branche sur les secondaires de transformateurs de courant (rapport de transformation m) suivant le schéma de la figure 86.

Le voltmètre V marque la tension :

$$U = mZ_1I_1 + mZ_2I_2.$$

Comme la composante homopolaire des courants n'existe pas (3 fils), on a :

$$U = m[Z_1(I_d + I_i) + Z_2(a^2I_d + aI_i)]$$

$$U = m[I_d(Z_1 + a^2Z_2) + I_i(Z_1 + aZ_2)].$$

On choisit les impédances de façon que l'un des multiplicateurs soit nul :

1° Si l'on veut I_d, on fait $Z_2 = -Z_1/a$, soit :

$$Z_2 = -Z_1a^2 = Z_1\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Si Z_1 est une résistance R, Z_2 sera constitué par une inductance L telle que :

$$Z_2 = R_2 + jL\omega = R\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

D'où :

$$R_2 = R/2 \qquad \text{et} \qquad L\omega = R\sqrt{3}/2.$$

Le voltmètre mesure :

$$U = mI_d[(R + a^2R(-a^2)] = mI_dR(1 - a)$$

et en module :

$$I_d = \frac{U}{mR\sqrt{3}} \qquad (\text{car}[1 - a] = \sqrt{3}).$$

2° Si l'on veut I_i, on fait $Z_2 = -Z_1/a^2 = -Z_1a$, ce qui revient à permuter Z_1 et Z_2. On lit la nouvelle tension U' et l'on a :

$$I_i = \frac{U'}{mR\sqrt{3}}.$$

Cette méthode dite « des impédances étalonnées » suppose que l'on dispose préalablement d'une résistance et d'une inductance dont les résistances sont dans le rapport 1/2 et dont l'angle d'inductance soit $\pi/3$.

40. **Puissances exprimées en fonction des composantes symétriques.** — Désignons par $\overset{*}{I}_1$, $\overset{*}{I}_2$, $\overset{*}{I}_3$ les expressions des *conjugués* des

courants I_1, I_2, I_3, dus à un système de tensions V_1, V_2, V_3 déséquilibré. Nous avons :

$$V_1 = V_h + V_d + V_i \qquad \text{et} \qquad \overset{*}{I}_1 = I_h + I_d + I_i$$
$$V_2 = V_h + a^2V_d + aV_i \qquad \overset{*}{I}_2 = I_h + aI_d + a^2I_i$$
$$V_3 = V_h + aV_d + a^2V_i \qquad \overset{*}{I}_3 = I_h + a^2I_d + aI_i.$$

La puissance complexe totale est la somme des puissances complexes des trois phases :

$$\overline{S} = \overline{V}_1\overset{*}{I}_1 + \overline{V}_2\overset{*}{I}_2 + \overline{V}_3\overset{*}{I}_3.$$

Or :

$$\overline{V}_1\overset{*}{I}_1 = (V_h + V_d + V_i)I_h + (V_h + V_d + V_i)I_d + (V_h + V_d + V_i)I_i$$
$$\overline{V}_2\overset{*}{I}_2 = (V_h + a^2V_d + aV_i)I_h + (V_h + a^2V_d + aV_i)aI_d + (V_h + a^2V_d + aV_i)a^2I_i$$
$$\overline{V}_3\overset{*}{I}_3 = (V_h + aV_d + a^2V_i)I_h + (V_h + aV_d + a^2V_i)a^2I_d + (V_h + aV_d + a^2V_i)aI_i.$$

Ajoutons ces équations colonne par colonne :

$$\overline{S} = 3V_hI_h + 3V_dI_d + 3V_iI_i = 3(S_h + S_d + S_i)$$
$$\overline{S} = 3[(P_h + jQ_h) + (P_d + jQ_d) + (P_i + jQ_i)]$$
$$= (3P_h + 3P_d + 3P_i) + j(3Q_h + 3Q_d + 3Q_i).$$

Donc la puissance *active* d'un système déséquilibré est la somme algébrique des puissances *actives* directe, inverse et homopolaire. Mêmes conclusions en ce qui concerne la puissance réactive.

41. **Applications de la méthode des composantes symétriques.** — Les principales applications de la méthode des composantes symétriques sont :

1° La détermination des *courants de déséquilibre* produits par des récepteurs dont l'impédance n'est pas la même sur les 3 phases : postes de soudage, fours électriques monophasés, traction électrique par courant monophasé, etc...

2° Le calcul des *courants de court-circuit.* — Le court-circuit représentant une impédance nulle. C'est un cas particulier de déséquilibre

dans lequel (s'il s'agit par exemple d'une mise à la terre d'un conducteur 1 d'un système triphasé, on a (fig. 84) $V_1 = 0$ et $J_2 = J_3$.

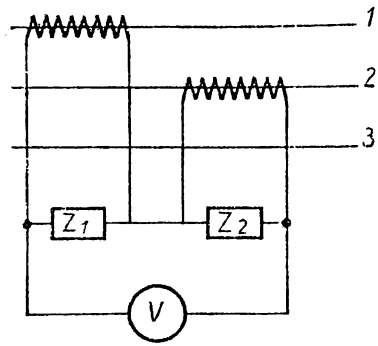


FIG. 11-86.

3° La détection des défauts dissymétriques (courts circuits entre deux phases, courts-circuits entre fil de ligne et neutre, etc.), grâce aux filtres dont nous avons donné des exemples [38]. Ils permettent d'actionner des relais qui sont précieux, car ils sont indifférents à la charge du réseau et ne fonctionnent qu'en cas d'incident dissymétrique.

APPENDICE

ÉQUATIONS DE MAXWELL

1. **Équation de Maxwell-Faraday.** — Nous avons donné [6-9 *bis*] l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

qui montre qu'une *induction magnétique variable engendre un champ électrique variable* et que l'on peut énoncer ainsi :

Le long d'un petit contour fermé autour d'un point A où règne une induction B magnétique variable avec le temps est créé un champ, électrique, normal au vecteur B, donné par la relation $\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$.

2. **Équation de Maxwell-Ampère.** — Nous avons montré que le courant de charge i d'un condensateur (fig. 1) se prolonge, dans le diélectrique de celui-ci par un courant *de déplacement* :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left|\oint_{(S)} \vec{D}\, d\vec{S}\right|$$

soit :

$$i = \oint_{(S)} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

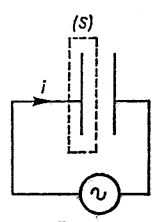


FIG. A1.

l'intégrale étant étendue à une surface de Gauss S enveloppant complètement une armature du condensateur.

Maxwell admit qu'un tel courant de déplacement provoque autour de lui un champ magnétique *tout comme un courant de conduction* de densité :

$$J = \frac{\partial D}{\partial t} \quad (^1).$$

En régime variable (le seul dans lequel il y a courant de déplacement) un courant de conduction et un courant de déplacement peuvent coexister dans un même milieu.

Dès lors l'expression vectorielle du théorème d'Ampère [1-17] devient :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

Telle est l'équation de Maxwell-Ampère.

3. **Équations de Maxwell.** — Groupons les formules se rapportant au champ électromagnétique en un point où les propriétés de la matière sont continues :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E} = -\partial B/\partial t \qquad \text{(Maxwell-Faraday).}$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho \qquad \text{(Poisson § 3-20).}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \qquad \text{(§ 15-15).}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \text{(Maxwell-Ampère).}$$

Telles sont les *équations de Maxwell.*

Il faut leur ajouter les équations qui expriment les propriétés du milieu :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H} \qquad \vec{J} = \gamma \vec{E}.$$

Ces équations permettent l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans l'espace.

4. **Propagation d'une onde électromagnétique le long d'un conducteur.** — Nous avons montré [7-9] que, lorsqu'on met brusquement sous tension les extrémités adjacentes des deux conducteurs d'une longue ligne, cette tension se propage vers les autres extrémités avec la vitesse $v = 1/\sqrt{LC}$, avec :

L = inductance par unité de longueur (H/m),

C = capacité entre conducteurs par unité de longueur (F/m),

le long d'un parcours fermé (C) contenant le front d'onde (contour en pointillé) (fig. 2) la circulation du vecteur E (champ de conduction) est :

$$\oint E\, dl = U = d\Phi/dt = L dx \times i/dt = Liv.$$

Égalons les ~~deux expressions de i :~~

$$CUv = U/Lv \quad \text{d'où} \quad v = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Par exemple si la ligne est un câble concentrique :

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln \frac{R}{r} \quad [19\text{-}15] \qquad \text{et} \qquad C = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln R/r}$$

On a :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \times \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \text{ m/s.}$$

Or 3×10^8 (1) est la célérité de la lumière. Donc (aux effets secondaires près) le champ électromagnétique avance le long des conducteurs *dans l'air* ($\varepsilon_r = 1$ et $\mu_r = 1$) à la vitesse de la lumière.

5. **Comment se propage dans le vide une onde électromagnétique.** — Chargeons un condensateur plan à air (fig. 2). Un champ E

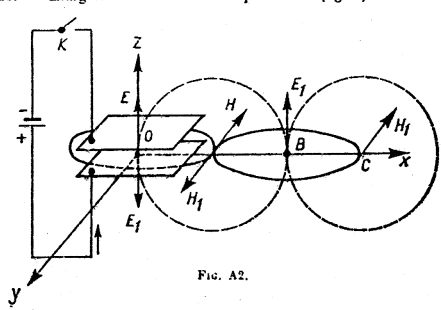


FIG. A2.

(1) Les deux types de courant existent dans le diélectrique d'un condensateur (résistance non infinie).

(1) $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = (4\pi \times 10^{-7} \times 8{,}85 \times 10^{-12})^{-1/2} = 3 \times 10^8$.

croissant est créé, entre les armatures, suivant Oz et crée un courant de déplacement $J = \varepsilon_0 \partial E/\partial t$.

Les lignes de ce courant s'entourent de lignes de champ magnétique fermées dans le plan xOy, lignes suivant lesquelles H est donné par :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{H} = J = \varepsilon_0 \partial E/\partial t.$$

Ce champ H est croissant. Sa variation engendre, le long d'une ligne tracée en pointillé dans le plan xOZ un nouveau champ électrique E_1. Celui-ci, au point O, est opposé à E.

Mais au point B, le champ E_1 a le même sens que E. Par sa variation il crée, dans le plan xOy un champ H_1.

— opposé à H au point A ;
— parallèle à H au point C.

On voit en définitive qu'il y a création réciproque le long de Ox, de champs H et E l'un dans le plan xOy, l'autre dans le plan xoz.

Quand la vitesse de variation de l'un est maximale, elle l'est aussi pour l'autre. Ces deux champs sont *en phase*.

6. Analogie mécanique. Propagation d'ondes transversales le long d'une corde. — On sait que des vibrations transversales d'une corde Ox dans le plan xoy (fig. 3) se transmettent sous forme d'ondes le long de la corde et que l'état d'un point de la corde à tout instant peut être caractérisé par :

— sa *vitesse vibratoire* $\dfrac{\partial y}{\partial t}$ qui peut être représentée par un vecteur H dans le plan xoy ;

— sa *déformation* $\text{tg}\ \alpha = \alpha = \partial y/\partial x$ qui peut être représentée par un vecteur E perpendiculaire au plan xoy.

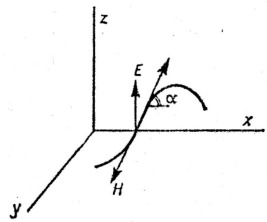


FIG. A3.

On voit facilement que ces vecteurs rectangulaires sont en phase. Ils caractérisent la propagation d'ondes transversales. On conçoit donc que l'existence des vecteurs E et H électrique et magnétique variables en chaque point de l'espace est corrélative de la propagation d'ondes électromagnétiques transversales.

Maxwell, à partir des équations us-indiquées a établi que leur vitesse de propagation ou *célérité* devait être égale, dans le vide, au rapport des unités électromagnétique et électrostatique de quantité d'électricité. L'expérience a montré que ce rapport est très sensiblement 3×10^8 *SI* c'est-à-dire la célérité de la lumière. C'est ainsi qu'on fut amené à admettre l'identité des ondes lumineuses et des ondes électromagnétiques. Les expériences de Hertz (mesure directe de la célérité des ondes électromagnétiques) confirmèrent ce résultat.

7. Densité de rayonnement. Vecteur de Poynting. — L'énergie emmagasinée par un champ électromagnétique par unité de volume est :

$$W_1 = \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon E^2}_{\substack{\text{dans}\\ \text{le champ}\\ \text{électrique}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu H^2}_{\substack{\text{dans}\\ \text{le champ}\\ \text{magnétique}}}$$

Lorsque H et E varient au cours du temps, il en est de même pour l'énergie emmagasinée. Il y a donc *propagation d'énergie*.

Pendant un temps dt le *premier* terme varie (équation de Maxwell-Ampère) de :

$$\varepsilon E \frac{\partial E}{\partial t}\,dt = E \times \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}\,dt = E(\text{rot}\ H - J)\,dt.$$

Le *second* terme varie (équation de Maxwell-Faraday) de :

$$\mu H \frac{\partial H}{\partial t}\,dt = H \times \mu \frac{\partial H}{\partial t}\,dt = H \times (-\text{rot}\ E)\,dt.$$

Dès lors, comme on a $J = \gamma E$ on peut écrire :

$$dW_1 = E\ \text{rot}\ H\,dt - \gamma E^2\,dt - H\ \text{rot}\ E\,dt.$$

Le second terme représente l'énergie dissipée sous forme de chaleur pendant le temps dt.

Pendant l'*unité de temps* l'énergie qui *sort* du volume dv est donc :

$$dP = (H \cdot \text{rot}\ E - E \cdot \text{rot}\ H)\,dv$$

que l'on peut écrire :

$$dP = \text{div}\,(E \wedge H)\,dv.$$

Posons avec Poynting : $E \wedge H = R$ (R = vecteur de Poynting). Nous avons :

$$dP = \text{div}\ \vec{R}\,dv$$

et le théorème de Green :

$$P = \iiint_{(v)} \text{div}\ \vec{R}\,dv = \iint_{(S)} \vec{R}\,dS.$$

cette dernière intégrale étant étendue à toute la surface S qui limite le volume considéré. Le vecteur de Poynting caractérise ainsi la direction de propagation du flux d'énergie rayonnante. C'est pourquoi on l'appelle aussi vecteur *densité de flux d'énergie*.

De même que, dans l'écoulement d'un fluide, les lignes de vitesses représentent les trajectoires des particules liquides de même les courbes tangentes en chaque point au vecteur $\vec{R}$ représentent les trajectoires de l'énergie. Ce sont les *rayons électromagnétiques*. Dans un milieu isotrope, ils sont normaux (1) en chaque point à la surface d'onde dont le plan tangent est défini par les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ (fig. A-4).

Le module du vecteur de Poynting est $R = EH \sin \alpha$. Lorsque la distance à la source est grande les lignes de champ électrique et magnétique sont perpendiculaires entr'elles ainsi qu'à la direction du rayon vecteur qui joint le point considéré à la source. Le vecteur de Poynting est alors porté par ce rayon vecteur et son module est EH.

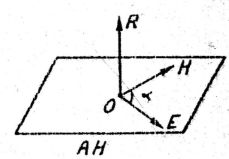


FIG. A5.

(1) Les vecteurs $\vec{E}, \vec{H}, \vec{R}$ forment un trièdre direct comme le montre la figure A-5.

IMPRIMERIE OFFSET-AUBIN, 86000 POITIERS
Dépôt légal, 4e trimestre 1978. Impr., P 8361.
Imprimé en France.

Collection Technologie et Université

B. BARIOU, M. KERFANTO. — *Technologie, introduction au génie chimique.*
Tome 1 : Mécanique dees fluides, échanges thermiques, traitement des solides.

N. BURGER, P. MICHEL. — *Mathématiques. Cours et exercices avec solutions.*
Tomes 1 et 2.

C. CHAUSSIN, G. HILLY. — *Métallurgie.*
Tome 1 : Alliages métalliques.
Tome 2 : Elaboration des métaux.

A. FAUSSURIER, R. SERVAN. — *Les matériaux électrotechniques.*

A. FOUILLÉ. — *Electricité fondamentale* : électrostatique, électrocinétique.

A. FOUILLÉ. — *Electrotechnique à l'usage des ingénieurs.*
Tome 1 : Electromagnétisme, courants alternatifs.
Tome 2 : Machines électriques à courants alternatifs.
Tome 3 : Machines à collecteur. Commande électronique.

A. FOUILLÉ. — *Problèmes d'électricité générale à l'usage des ingénieurs.*

A. FOUILLÉ. — *Problèmes d'électrotechnique à l'usage des ingénieurs* : machines électriques.

L. GEMINARD, A. GIET. — *Stabilité des constructions.*
Tome 1 : Flambage, méthode de Cross, treillis.
Tome 2 : Travaux virtuels, cadres, arcs.
Tome 3 : Plaques, poutres creuses, plasticité.

A. GIET, L. GEMINARD. — *Résistance des matériaux.*
Tomes 1 et 2.

A. GIET. — *Problèmes de résistance des matériaux.*
Tomes 1 et 2.

M. LE GUYADER, G. MARTIN, A. TALLEC. — *Cours de chimie physique et analytique.*
Tome 1 : Structure de la matière.

G. LEMASSON, L. BLAIN. — *Matériaux de construction mécanique et électrique.*

J. P. LEROUX, Ph. BAUDIN. — *Mécanique des fluides.*

C. PELLETIER, J. SCHMOUKER. — *Cours de physique.*
Tome 1 : Mesure des grandeurs et thermodynamique.
Tome 2 : Optique.

M. POLOUJADOFF. — *Machines électriques et réseaux industriels.*

J. P. RAYMOND, J. MINNE. — *Les schémas d'automatisme : théorie et pratique.*

P. THUREAU, D. LECLERC. — *Vibrations ; régimes linéaires.*